Демонстрационный вариант комплекта заданий Второго этапа Олимпиады по Профилю «Прикладная математика и искусственный интеллект» по треку магистратуры, треку аспирантуры

Демонстрационный вариант комплекта заданий Второго этапа Олимпиады по Профилю по треку магистратуры, треку аспирантуры включает 30 заданий, из них 19 тестовых заданий начального уровня с одним правильным ответом (верно выполненное задание оценивается в 1-3 балла), 8 тестовых заданий среднего уровня с несколькими правильными ответами или «задание с эталонным ответом» (верно выполненное задание оценивается в 3-7 баллов), 3 задания высокого уровня с развернутым ответом (верно выполненное задание оценивается в 5-15 баллов).
Для заданий с развёрнутым ответом приводятся критерии оценивания и эталонный ответ.

Математика

Задание 1
Начальный уровень сложности (2 балла)

Найти расстояние между прямыми l_1 и l_2.

$$l_1: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad l_2: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
c) 0
d) $\sqrt{2}$

Ответ: a

Задание 2
Начальный уровень сложности (1 балла)

Рассмотрим $U \subset \mathbb{R}^4$: $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$. Найти $\dim U$.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Ответ: c

Задание 3
Средний уровень сложности (5 баллов)

Привести матрицу линейного оператора $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ к жордановой нормальной форме. В ответе записать жорданову нормальную форму матрицы.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Задание 4
Начальный уровень сложности (3 балла)

Найти предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\sqrt{9n^2+18n}-3n\right)$.

a) ln3
b) 0
c) ln6
d) предел не существует

Ответ: a

Задание 5
Начальный уровень сложности (3 балла)

Задание 5 (начальный уровень сложности, 2 балла).
Вычислите интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi}(x^6+x)\cdot\sin x\, d\, x$.

a) 0
b) π
c) 2π
d) −2π

Ответ: c

Задание 6
Высокий уровень сложности (8 баллов)

В линейном пространстве функций, непрерывных на отрезке $[-\pi;\pi]$, введены скалярное произведение элементов $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$ и расстояние между элементами $\rho(f,g)=\sqrt{(f-g,f-g)}$. Найти расстояние от функции $f(x)=x$ до подпространства L, где L – линейная оболочка функций $f_0(x)=1$, $f_1(x)=\sin x$, $f_2(x)=\cos x$.

Решение:

Обозначим пространство функций, непрерывных на отрезке $[-\pi;\pi]$ через E. Разложим E в прямую сумму L и $L^{\perp}$: $E = L \oplus L^{\perp}$. Тогда $x = y + z$, где $y \in L$, а $z \in L^{\perp}$. По определению $\rho(x, L) = \min\limits_{y \in L} \rho(x, y)$. Известно, что $\min\limits_{y \in L} \rho(x, y) = \rho(z, 0)$. Найдем z. Разложим y по базису L: $y = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \cos x$. Имеем $x = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \sin x + a_2 \cdot \cos x + z$. Умножая это равенство скалярно на 1, $\sin x$, $\cos x$, получим $x = 2 \cdot \sin x + z$. Следовательно $z = x - 2 \cdot \sin x$, а $\rho(z, 0) = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (x - 2\sin x)^2 dx}$. Вычислим $\int_{-\pi}^{\pi} (x - 2\sin x)^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 - 4x\sin x + 4\sin^2 x) dx = 2\pi\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right)$. В итоге получаем $\rho(x, L) = \sqrt{2\pi\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right)}$.

Ответ: $\rho(x, L) = \sqrt{2\pi\left(\frac{\pi^2}{3} - 2\right)}$

Критерии оценивания:

Ответ выписан без обоснования - 0 баллов.

Есть правильные идеи по поводу решения задачи - 2 балла.

Найдена ортогональная проекция функции $f(x) = x$ на L - 4 балла.

Задача вычисления искомого расстояния сведена к вычислению ортогональной составляющей - 6 баллов.

Задача решена верно - 8 баллов.

Прикладная математика

Задание 7
Начальный уровень сложности (3 балла)

Вычислить наибольший общий делитель многочленов $x^3 + x^2 - 2$ и $x^3 + 2x^2 + 2x$.

a) $x^2 + 2x + 2$
b) x
c) $x - 1$
d) 1

Ответ: a

Задание 8
Средний уровень сложности (5 баллов)

Найдите количество целых чисел x, $x \in [0; 100]$, для которых $x^9 + 1$ делится на 15.

Ответ: 6

Задание 9

Начальный уровень сложности (3 балла)

Функции 2, $x+2$, x^2-2 являются решениями уравнения $y''+a(x)y'+b(x)y=c(x)$. Найдите $a(1)$.

a) -0.8
b) -0.4
c) -1
d) 0

Ответ: b

Задание 10
Высокий уровень сложности (8 баллов)

Фазовая траектория системы $\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= 2x-5y, \\ \frac{dy}{dt} &= 8x-2y, \end{cases}$ проходит через точку (–1;2). Найдите максимальное расстояние от точек этой фазовой траектории до точки (0;0).

Решение:

Запишем матрицу системы $\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$ и найдем ее собственные значения: $\lambda_1=-6i, \lambda_2=6i$. Следовательно точка (0;0) является центром, а фазовые траекториями являются эллипсы с центром в точке (0;0). Эти траектории являются решениями уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{8x-2y}{2x-5y}$. Запишем это уравнение в симметрической форме: $(8x-2y)dx+(5y-2x)dy=0$. Так как оно является уравнением в полных дифференциалах, то перепишем его в виде: $d\left(4x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2\right)=0$. Запишем его общее решение: $8x^2-4xy+5y^2=C$. Константу C найдем из условия, что фазовая траектория проходит через точку (–1;2): $8+4+20=C$. В результате получаем уравнение фазовой траектории:

$$8x^2-4xy+5y^2=36.$$

Это уравнение эллипса. Для нахождения его канонической формы запишем матрицу квадратичной формы $8x^2-4xy+5y^2$: $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$. Собственные значения этой матрицы равны $\lambda_1=4, \lambda_2=9$, следовательно уравнение эллипса приводится к виду $4\tilde{x}^2+9\tilde{y}^2=36$ или $\frac{\tilde{x}^2}{9}+\frac{\tilde{y}^2}{4}=1$. Полуоси эллипса равны 3 и 2. Следовательно максимальное расстояние от точек эллипса до точки (0;0) равно 3.

Ответ: 3

Критерии оценивания:

Ответ выписан без обоснования - 0 баллов.

Получено семейство фазовых траекторий системы - 2 балла.

Получена фазовая траектория, проходящая через заданную точку - 4 балла.

Получено каноническое уравнение эллипса - 6 баллов.

Задача решена верно - 8 баллов.

Математическая физика

Задание 11
Начальный уровень сложности (1 балл)

Какая из перечисленных функций является гармонической в области $x^2 + y^2 \leq 4$?

a) $x^2 - y^2$
b) $x^3 + 3y$
c) $x^2 + y^2$
d) $1/\sqrt{x^2 + y^2}$

Ответ: a

Задание 12
Начальный уровень сложности (2 балла)

Определите тип уравнения второго порядка в частных производных относительно функции двух переменных $u(x,\ y)$: $u_{xx} + 2 \cdot u_{xy} - 9 \cdot u_{yy} = 0$.

a) гиперболический
b) параболический
c) эллиптический

Ответ: a

Задание 13
Средний уровень сложности (4 балла)

Найдите собственные значения задачи Штурма-Лиувилля на промежутке $\left(\frac{31}{5}; \frac{25}{2}\right)$:

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda \cdot Y(x) = 0, \\ Y(0) = Y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Ответ: 9

Задание 14
Средний уровень сложности (5 баллов)

Найдите решение задачи Коши: $\begin{cases} u_{xx} - u_{tt} = 0, -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \sin x. \end{cases}$

Ответ: $u(x,t) = sin\, x \cdot sin\, t$

Статистика и теория вероятностей

Задание 15
Начальный уровень сложности (2 балла)

На отрезке от 2 до 5 случайным образом поставили точку. Какова вероятность, что эта точка попала в интервал между 3 и 4?

a) $\frac{1}{3}$
b) $\frac{3}{10}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{5}$

Ответ: a

Задание 16
Начальный уровень сложности (3 балла)

Случайная величина имеет нормальное распределение. Плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{(t-6)^2}{9}}$$

Найти математическое ожидание случайной величины.

a) 6
b) 0
c) 3
d) 9

Ответ: a

Задание 17
Средний уровень сложности (5 баллов)

Дана совместная плотность распределения случайных величин ξ и η:

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} {}^{1}/_{4\pi}, & x^2 + y^2 \leq 4 \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$. Зависимы ли случайные величины?

Ответ: $r(\xi, \eta) = 0$, зависимы

Задание 18
Высокий уровень сложности (8 баллов)

Из большого количества опытных образцов для продолжения эксперимента лаборант должен отобрать два, обладающие определенным свойством. Вероятность того, что образец обладает этим свойством $p = 0{,}2$. Сколько в среднем образцов должен проверить лаборант, чтобы отобрать необходимые?

Решение:

Пусть ξ-число проверенных образцов. Тогда $P\{\xi = k\} = C_{k-1}^{1} p^2 (1-p)^{k-2}$.

$$M\xi = \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot P\{\xi = k\} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\, p^2 (1-p)^{k-2} = p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k=2}^{\infty} x^k = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Тогда среднее значение проверенных образцов

$$M\xi = p^2 \frac{2}{\big(1-(1-p)\big)^3} = \frac{2}{p} = 10$$

Ответ: $M\xi = 10$

Критерии оценивания:

Ответ выписан без обоснования - 0 баллов.

Есть правильные идеи по поводу решения задачи - 2 балла.

Правильно выписан закон распределения случайной величины - 4 балла.

Правильно выписана формула для вычисления математического ожидания случайной величины - 6 баллов.

Задача решена верно - 8 баллов.

Информатика - искусственный интеллект

Задание 19
Начальный уровень сложности (2 балла)

Пусть (0, 1), (1, 1), (2, 5) – обучающая выборка, каждый элемент которой имеет вид (x, y), где x – входная переменная, y – желаемый выход. Найдите коэффициент детерминации простейшей линейной регрессионной модели вида y = ax+b, обученной на этой выборке по методу наименьших квадратов.

a) 0.75
b) 0.866
c) 0.6667
d) 0.725

Ответ: a

Задание 20
Начальный уровень сложности (2 балла)

На некотором наборе данных классификатор предсказал следующие метки классов: 1, 2, 1, 3, 3, 2, 2, 3. Известны соответствующие истинные метки классов для этих образцов: 1, 3, 3, 3, 1, 2, 2, 1. Найдите макро-усредненное значение F1-меры классификатора на этом наборе данных.

a) 0.5111
b) 0.5556
c) 0.5
d) 0.475

Ответ: a

Задание 21
Начальный уровень сложности (3 балла)

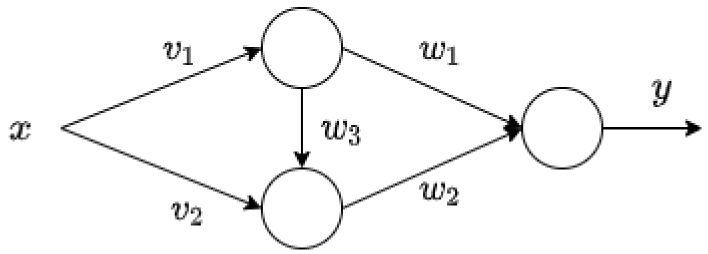
Известно, что три обученных классификатора относят входной пример к правильному классу с вероятностями 0.8, 0.9 и 0.75 соответственно. Предполагая, что ошибки классификаторов независимы, определить, с какой вероятностью входной пример будет отнесен к правильному классу ансамблем из этих классификаторов, использующим в качестве решающего правила голосование простого большинства?

a) 0.915
b) 0.8167
c) 0.85
d) 0.9

Ответ: a

Задание 22
Средний уровень сложности (5 баллов)

Нейронная сеть, схема которой изображена на рисунке, обучается методом стохастического градиентного спуска с параметром скорости обучения $\alpha = 0.1$.



Функция активации выходного нейрона линейная, функции активации остальных нейронов имеют вид:

$$f(h) = \begin{cases} h, & h \geq 0, \\ 0, & h < 0. \end{cases}$$

На текущей итерации обучения синаптические коэффициенты (веса) нейронов сети приняли значения $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = 1$, $w_3 = -2$, смещения всех нейронов нулевые. На вход сети подается обучающий пример $x = 2$, которому соответствует желаемое значение выхода $\sigma = 3$. Проведите одну итерацию обучения сети с квадратичной функцией потерь $L = \frac{1}{2}(\sigma - y)^2$ и рассчитайте значение синаптического коэффициента v_1 после его подстройки.

Ответ: 1.2

Информатика – кибернетика

Задание 23
Начальный уровень сложности (1 балл)

Наклон высокочастотной части асимптотической логарифмической амплитудной частотной характеристики апериодического звена составляет величину

a) –20 дБ/дек.
b) 0 дБ/дек.
c) 20 дБ/дек.
d) 40 дБ/дек.
e) –40 дБ/дек.

Ответ: a

Задание 24
Начальный уровень сложности (2 балла)

Какое типовое динамическое звено содержит передаточная функция системы $W(s) = \frac{s^2-2s+4}{s^2-25}$?

a) неустойчивое апериодическое
b) дифференцирующее первого порядка
c) дифференцирующее второго порядка
d) колебательное
e) интегрирующее

Ответ: а

Задание 25
Начальный уровень сложности (3 балла)

Определить длительность переходного процесса в нелинейной системе от точки А до точки D, если соответствующим участком фазовой траектории на фазовой плоскости xoy (x – выходная координата системы, y – скорость ее изменения) являются отрезки прямых, соединяющих точки A(–4;3), B(2;3), C(2;1) и D(6;1).

a) 6
b) 2
c) 4
d) 8

Ответ: а

Задание 26
Средний уровень сложности (4 баллов)

При каких значениях параметра a замкнутая система (обратная связь единичная и отрицательная) находится на границе своей устойчивости, если дифференциальное уравнение этой системы в разомкнутом состоянии имеет следующий вид (здесь u(t) и y(t) – соответственно вход и выход разомкнутой системы):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} - ay(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} - a\frac{du(t)}{dt} + 5u(t).$$

Ответ: 4

Информатика и информационные системы вопросы

Задание 27
Начальный уровень сложности (1 балл)

Что является основной структурной частью реляционной модели?

a) отношение
b) атрибут

c) кортеж

Ответ: a

Задание 28
Начальный уровень сложности (1 балл)

Сколько свойств, согласно теореме CAP, может выполняться в распределенной системе?

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4

Ответ: b

Задание 29
Начальный уровень сложности (2 балла)

Для чего используются ETL-процессы?

a) для обеспечения качества, создания необходимой структуры и поддержания смысловых характеристик данных
b) для создания реляционных таблиц
c) для проведения процедур поиска, фильтрации и сортировки данных в хранилище после поступления SQL-запроса

Ответ: a

Задание 30
Средний уровень сложности (4 балла)

Даны отношения A и B. Отношение A имеет вид {ID студента, Фамилия студента, Группа, Оценка}, отношение B имеет вид {ID студента, Фамилия студента, Имя студента, Предмет, Оценка}. Какое количество атрибутов будет в отношении C = A JOIN B?

Ответ: 6