Демонстрационный вариант заданий заключительного этапа по профилю «МАТЕМАТИКА»

1. Пусть $y = kx + b$ - наклонная асимптота к графику функции $y = \dfrac{x^3 + 7x^2}{(x+2)^2}$. Найдите её уравнение. В ответе укажите значение выражения $3k + b$.

2. Известно, что z_1 и z_2 - корни уравнения $z^2 + (i-7)z + 24 - 7i = 0$. Найдите $|z_1| + |z_2|$.

3. Найдите объём тетраэдра $ABCD$, если в некоторой прямоугольной декартовой системе координат его вершины имеют координаты $A(5;-3;1)$, $B(3;0;2)$, $C(4;0;-2)$, $D(-1;0;4)$. В ответе укажите объём тетраэдра, умноженный на 70.

4. Найдите площадь области на плоскости, ограниченной кривыми $y = x^3 - 3x^2$ и $y = 9x + 5$.

5. Найдите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{n^2 + 3x}{(n^3 + 5x^2)(\ln n)^{9-2x-x^2}}$, где $x \in R$. В ответе укажите меру полученного множества.

6. Найдите вычет функции $f(z) = \dfrac{z^4 + 2z}{z^2 + 2z + 1}$ в точке $z_0 = -1$.

7. Пусть ξ - случайная величина, равномерно распределённая на некотором промежутке. Найдите дисперсию ξ, если $P(\xi < 4) = \dfrac{1}{6}$, $P(\xi > 13) = \dfrac{1}{3}$.

8. Матрица линейного преобразования φ в некотором базисе имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 28 & -17 \\ 6 & 10 & 14 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдите размерность ядра φ.

9. Найдите наименьшее целое значение α, при котором сходится несобственный интеграл $\int\limits_5^{+\infty} \frac{x^3dx}{(x+\cos 3x)^\alpha}$.

10. Найдите предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{9n^2-4n}-\sqrt[3]{27n^3+9n^2}\right)$.

11. Рассмотрим десятизначные числа, составленные из цифр 2, 4, 5, 6 (не все цифры должны встречаться в записи числа), у которых каждая следующая цифра не меньше предыдущей. Одно из таких чисел выбирается случайным образом. Найдите вероятность того, что в записи этого числа используется не более трёх различных цифр.

12. Пусть $y=f(x)$ - решение задачи Коши $y'''-y''+9y'-9y=-60e^x$; $y(0)=3$, $y'(0)=-3$, $y''(0)=-9$. Найдите $f(x)$.

13. Найдите криволинейный интеграл $\oint\limits_\Gamma\left(\frac{3}{2}y^2+4x-y\right)dx+(3xy+5y+2x)dy$, где Γ - граница области $|3x-y|+|3x+y|<12$, ориентированная против часовой стрелки.

14. Дана функция $u=xz\cos\frac{y}{3}$. Найдите наибольшее значение $|\operatorname{grad}u|^2$ на множестве $x^2+z^2\le 7$.

Ответы и решения

1. Ответ: 6.

Решение. Представляя данную неправильную дробь $y=\frac{x^3+7x^2}{(x+2)^2}$ в виде многочлена и правильной дроби, мы получаем $y=x+3-\frac{16x+12}{x^2+4x+4}$. Поэтому $y=x+3$ - это наклонная асимптота; при этом $3k+b=6$.

2. Ответ: 10.

Решение. Дискримимнант D данного квадратного уравнения равен $(i-7)^2-4(24-7i)=-48+14i$. Для вычисления значений $\sqrt{D}$ представим дискриминант в виде $D=(a+bi)^2$, где a и b - действительные числа. Получаем

$$a^2+2abi-b^2=-48+14i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=-48, \\ 2ab=14 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, b=7, \\ a=-1, b=-7. \end{array} \right.$$

Следовательно, $\sqrt{D}=1+7i$ или $\sqrt{D}=-1-7i$, и поэтому $z=\frac{7-i\pm(1+7i)}{2}$, $z_1=3-4i$, $z_2=4+3i$. Итак, $|z_1|=|z_2|=5$, $|z_1|+|z_2|=10$.

3. Ответ: 490.

Решение. Объём тетраэдра $ABCD$ составляет $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$. Координаты этих векторов таковы: $\overrightarrow{AB}(-2;3;1)$, $\overrightarrow{AC}(-2;3;\ 1)$, $\overrightarrow{AD}(-6;3;3)$. Следовательно, смешанное произведение этих векторов равно

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 42,$$

а объём параллелепипеда равен модулю этого смешанного произведения, т.е. 42. Поэтому объём тетраэдра $ABCD$ равен 7, а в ответ нам нужно записать объём, умноженный на 70, т.е. 490.

4. Ответ: 108.

Решение. Пусть $f(x) = x^3 - 3x^2$, $g(x) = 9x + 5$. Решая уравнение $f(x) = g(x)$ мы находим значения x - координаты общих точек двух данных кривых. Итак, мы получаем $(x+1)^2(x-5) = 0$, откуда $x = -1$ или $x = 5$. Площадь, ограниченная кривыми, равна модулю интеграла $\int_{-1}^{5}\left(f(x) - g(x)\right)dx$, который равен $\left(\frac{x^4}{4} - x^3 - \frac{9x^2}{2} - 5x\right)\Big|_{-1}^{5} = -108$; значит, искомая площадь равна 108.

5. Ответ: 6.

Решение. Пусть $a_n(x) = \dfrac{n^2 + 3x}{\left(n^3 + 5x^2\right)(\ln n)^{9-2x-x^2}}$. Для каждого заданного значения x величина $a_n(x)$ становится положительной при больших n. Таким образом, если мы заменим $a_n(x)$ некоторой эквивалентной функцией $b_n(x)$, это не влияет на сходимость ряда.

(Под эквивалентными функциями мы понимаем такие $a_n(x)$ и $b_n(x)$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n(x)}{b_n(x)} = 1$.)

Очевидно, что $a_n(x) \sim \frac{1}{n(\ln n)^{9-2x-x^2}}$. Также известно, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^{\alpha} n}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Значит, данный ряд сходится для тех (и только тех) x, при которых $9 - 2x - x^2 > 1$. Это даёт множество $x \in (-4;2)$, мера которого равна 6.

6. Ответ: - 2.

Решение. Поскольку z_0 - полюс второго порядка данной функции,

$$\operatorname{res}(f(z), z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left((z - z_0)^2 f(z)\right) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz}\left(z^4 + 2z\right) = \lim_{z \to -1}\left(4z^3 + 2\right) = -2.$$

7. Ответ: 27.

Решение. Так как $P(\xi < 4) = \dfrac{1}{6}$ и $P(\xi > 13) = \dfrac{1}{3}$, мы получаем, что вероятность того, что ξ

принимает значения из отрезка $[4;13]$, равна $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Значит, плотность распределения ξ равна $\frac{1}{2}:(13-4)=\frac{1}{18}$, и поэтому ξ распределена на некотором интервале длины 18 (и при этом нет необходимости находить концы этого интервала). Дисперсия ξ при этом равна $\frac{18^2}{12}=27$.

8. Ответ: 3.

Решение. Преобразуем данную матрицу, используя линейные преобразования строк:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ 4 & 2 & -28 & 28 & -17 \\ 6 & 10 & 14 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & -16 & 12 & -11 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & -6 & -48 & 36 & -33 \\ 0 & -2 & -16 & 12 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -2 & -16 & 12 & -11 \\ 1 & 2 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2 (очевидно, что первые две её строки линейно независимы), а это означает, что ранг исходной матрицы также равен 2. Известно, что $\dim\ker\varphi+\dim\operatorname{Im}\varphi=\dim V$, где $\ker\varphi$ ядро преобразования φ, $\operatorname{Im}\varphi$ образ φ, а V - данное векторное пространство. Поскольку $\dim V=5$, а $\dim\operatorname{Im}\varphi$ равно рангу матрицы преобразования, т.е. 2, отсюда слеует, что $\dim\ker\varphi=3$.

9. Ответ: 5.

Решение.Подынтегральная функция положительна на промежутке интегрирования и эквивалентна $x^{3-\alpha}$, $x\to+\infty$. По признаку сравнения оба интеграла $\int\limits_5^{+\infty}\frac{x^3dx}{(x+\cos 3x)^\alpha}$ и $\int\limits_5^{+\infty}x^{3-\alpha}dx$ сходятся или расходятся одновременно. Так как интеграл $\int\limits_5^{+\infty}x^{3-\alpha}dx$ сходится тогда и только тогда, когда $3-\alpha<-1$, то есть $\alpha>4$, получаем, что минимальное целое α, удовлетворяющее этому условию, - это 5.

10. Ответ: - 1.

Решение. Используя формулу Тейлора для разложения бинома, получаем

$$\sqrt{9n^2-4n}=3n\sqrt{1-\frac{4}{9n}}=3n\left(1-\frac{2}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=3n-\frac{2}{3}+o(1);$$

$$\sqrt[3]{27n^3+9n^2}=3n\sqrt[3]{1+\frac{1}{3n}}=3n\left(1+\frac{1}{9n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=3n+\frac{1}{3}+o(1).$$

Следовательно, предел последовательности равен $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3n-\frac{2}{3}-3n-\frac{1}{3}+o(1)\right)=-1$.

11. Ответ: $\frac{101}{143}$.

Решение. Пусть данные цифры обозначены десятью шарами, стоящими в ряд. Мы используем три перегородки, чтобы разделить эти шары на 4 группы (слева от первой перегородки каждый шар означает цифру 2, между первой и второй перегородками – цифру 4 и т.д.). Никаких ограничений на расположение перегородок у нас нет (если, например, слева от первой перегородки нет шаров, это означает, что цифра 2 в числе не используется; если вторая и третья перегородки стоят подряд, то цифры 5 нет в числеи т.п.).

Заметим, что между множеством способов расстановки перегородок и множеством рассматриваемых десятизначных цифр есть взаимно однозначное соответствие. Как же можно вычислить количество способов расставить перегородки? В действительности, у нас есть 13 разных предметов (10 шаров и 3 перегородки), которые необходимо расставить в ряд.Для того, чтобы это сделать, необходимо выбрать 3 места из 13 для перегородок (остальные места автоматически заполнятся шарами). Итак, есть $C_{13}^3 = 286$ различных способов разместить перегородки, т.е. 286 различных 10-значных чисел, удовлетворяющих данному условию.

Теперь рассмотрим, в скольких числах используются все четыре цифры. Если мы опять прибегнем к методу шаров и перегородок, у нас по-прежнему 10 шаров и 3 перегородки, но при этом у нас появляются ограничения на расстановку перегородок: никакие две перегородки не могут стоять подряд, и никакая перегородка не может занимать крайнюю левую или крайнюю правую позицию. Тогда если мы сперва разместим шары, перегородки смогут занимать только места между ними, не более чем одна перегородка на каждое место. Таким образом, получаем $C_9^3 = 84$ различных числа.

Следовательно, всего есть $286-84=202$ числа таких, что в их записи используются не более трёх различных цифр, и вероятность выбрать такое число равна $\frac{202}{286}=\frac{101}{143}$.

12. Ответ: $f(x)=(3-6x)e^x$.

Решение. Характеристическое уравнение - это $\lambda^3-\lambda^2+9\lambda-9=0$; следовательно, $\lambda_1=-3i$, $\lambda_2=3i$, $\lambda_3=1$, и общее решение однородного уравнения есть $y_0=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+C_3e^x$.

Частное решение неоднородного уравнения можно найти в виде $y_1=Axe^x$, где A - некоторая константа, которую предстоит найти. Подставляя эту функцию в исходное уравнение и упрощая, получаем $10Ae^x=-60e^x$, поэтому $A=-6$.

Общее решение неоднородного уравнения равно $y_0+y_1=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+(C_3-6x)e^x$ Задача Коши приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1+C_3=3, \\ 3C_2+C_3-6=-3, \\ -9C_1+C_3-12=-9. \end{cases}$$

Решая её, находим, что $C_1=C_2=0$, $C_3=3$, и поэтому решение задачи Коши есть $f(x)=(3-6x)e^x$.

13. Ответ: 144.

Решение. По формуле Грина данный интеграл равен

$$\iint\limits_G\left(\frac{\partial}{\partial x}(3xy+5y+2x)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3}{2}y^2+4x-y\right)\right)dxdy=\iint\limits_G 3dxdy,$$

где G - область, ограниченная кривой Γ. Эта область является прямоугольником с вершинами $(\pm 2;\pm 6)$, поэтому её площадь равна $12\cdot 4=48$. Интеграл равен площади области G, умноженой на 3, откуда получаем 144.

14. Ответ: 7.

Решение. Сначала находим частные производные данной функции:

$$u_x=z\cos\frac{y}{3}, u_y=-\frac{1}{3}xz\sin\frac{y}{3}, u_z=x\cos\frac{y}{3}.$$

Следовательно,

$$|\operatorname{grad} u|^2=\left(x^2+z^2\right)\cos^2\frac{y}{3}+\frac{x^2z^2}{9}\sin^2\frac{y}{3}=\left(x^2+z^2-\frac{x^2z^2}{9}\right)\cos^2\frac{y}{3}+\frac{x^2z^2}{9}.$$

Ели перейти к полярным координатам для x и z, мы получаем $x=\rho\cos\varphi$, $z=\rho\sin\varphi$,

$0 \le \varphi < 2\pi$. Ограничение $x^2 + z^2 \le 7$ означает, что $\rho \le \sqrt{7}$. При этих условиях значение выражения $x^2 + z^2 - \dfrac{x^2 z^2}{9}$ положительно (действительно, в полярных координатах оно равно $\rho^2 - \dfrac{1}{36}\rho^4 \sin^2 2\varphi = \dfrac{\rho^2}{36}\left(36 - \rho^2 \sin^2 2\varphi\right)$), поэтому оно достигает своего максимума при $\cos^2 \dfrac{y}{3} = 1$. Значит, $\max\left(|\operatorname{grad} u|^2\right) = \max\left(x^2 + z^2\right) = 7$.