Демонстрационный вариант заданий второго этапа по Профилю «Инженерия и технологии»

Тематический блок 1. Теоретическая механика

Задача 1. (1 балл)

При каких условиях количество движения системы в инерциальной системе отсчета сохраняется

А) если линия действия равнодействующей всех сил проходит через начало системы отчета

Б) если система является замкнутой

В) если сумма внутренних сил равна постоянной величине

Г) если все силы, действующие на систему, являются потенциальными.

Ответ: Б) если система является замкнутой

Решение: Механическая система, на которую в выбранной инерциальной системе отсчета не действуют внешние силы, называется замкнутой. В этом случае сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю. Согласно теореме об изменении количества движения, количество движения системы будет постоянным.

Задача 2. (1 балл)

Найти работу, совершенную силой упругости, действующей со стороны пружины с коэффициентом жесткости 100 Н/м, при движении из начального деформированного состояния, при котором абсолютная деформация была 0.1 м, в конечное недеформированное состояние.

А) 1 Дж

Б) 10 Дж

В) 0,5 Дж

Г) 5 Дж.

Ответ: В) 0,5 Дж.

Решение: Согласно теореме об убыли потенциальной энергии, работа, совершаемая консервативной силой на некотором перемещении, равна убыли соответствующей потенциальной энергии, из чего следует

$$A = U_1 - U_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2} = 0{,}5 \text{ Дж}$$

Задача 3. (1 балл)

Найти величину силы, действующей на тело, если известно, что момент данной силы относительно оси равен 20 Н м, а расстояние от оси до линии действия силы равно 0,1 м. Линия действия силы принадлежит плоскости, перпендикулярной оси.

А) 200 Н

Б) 2 Н

В) 0,2 Н

Г) 20,1 Н

Ответ: А) 200 Н.

Решение: Величина момента силы относительно оси при условии, что линия действия силы принадлежит плоскости, перпендикулярной оси, равна произведению силы на расстояние от линии действия силы до оси, относительно которой вычисляется момент. Получаем

$$F = \frac{M}{d} = 200 \text{ Н}$$

Задача 4. (2 балла)

Задан закон движения точки P массой 2 кг (величины координат указаны в метрах)

$$x(t) = 1 + 2t + 3t^2, y(t) = 2 + 4t.$$

Найти абсолютную величину скорости точки (выраженную в м/с) в момент 2 с, а также величину силы (выраженную в Н), действующей на тело. Необходимо отметить два правильных числа.

А) 21

Б) 15

В) 10

Г) 12

Д) 14

Ответ: Б) 15 и Г) 12.

Решение: Дифференцируя законы движения по времени, находим

$$v_x(t) = 2 + 6t, v_y(t) = 4.$$

Находя вторую производную, получаем составляющие ускорения

$$w_x(t) = 6, w_y(t) = 0.$$

Подставим значение времени 2 с в выражения для скорости и найдем компоненты вектора скорости

$$v_x = 14, v_y = 4.$$

Находим величину вектора скорости 14,56 м/с и, округляя до целых единиц м/с, получим 15 м/с. Для вычисления силы, действующей на точку, воспользуемся теоремой об изменении количества движения

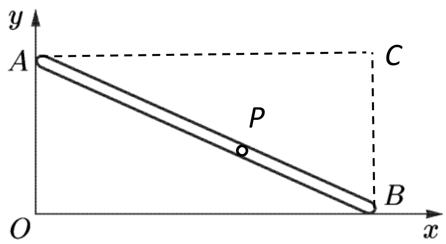
$$F = mw = 12 \text{ Н}.$$

Критерии: за 2 правильных ответа 2 балла, за 1 правильный ответ 1 балл, ни одного правильного ответа 0 баллов.

Задача 5. (9 баллов)

Стержень AB длиной l движется так, что точки A и B перемещаются вдоль взаимно перпендикулярных осей Ox и Oy соответственно. Скорость точки A постоянна. Найти ускорение произвольной точки стержня. Показать, что вектор ускорения направлен перпендикулярно оси Oy и обратно пропорционален третьей степени расстояния до нее.

Решение.



Найдем ускорение точки стержня P, находящейся на расстоянии l_P от точки A. Используем теорему Ривальса для случая плоскопараллельного движения

$$\overrightarrow{w_P} = \overrightarrow{w_A} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_{AP}} - \omega^2 \overrightarrow{r_{AP}}$$

где вектор $\overrightarrow{r_{AP}} = (l_P \sin\alpha, -l_P \cos\alpha, 0)$, угол $\alpha = \widehat{OAB}$. Угловая скорость стержня и угловое ускорение находятся из соотношений

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \sin\alpha}, \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{v_A^2 \cos\alpha}{l^2 (\sin\alpha)^3}$$

Здесь точка C – мгновенный центр скоростей, v_A - абсолютная величина вектора скорости т A. Учитывая, что при плоскопараллельном движении вектор углового ускорения имеет вид,

$$\vec{\varepsilon} = (0,0,\varepsilon)$$

подставляем все полученные выражения в теорему Ривальса и находим

$$\overrightarrow{w_P} = (w_x, 0,0),$$

где единственной отличной от нуля компонентой является компонента вдоль оси Ox, которая имеет вид

$$w_x = -\frac{a}{x_P^3}$$

Величина a в этом выражении является постоянной величиной для фиксированной точки P, равной

$$a = \frac{v_A^2 l_P^4}{l^2}$$

а величина

$$x_P = l_P \sin\alpha$$

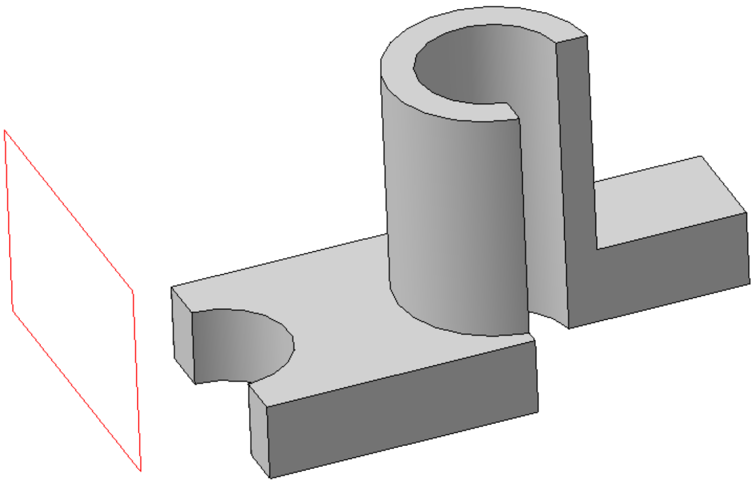
является расстоянием от точки P до оси Oy.

Ответ: ускорение направлено перпендикулярно оси Oy и равно $\overrightarrow{w_P} = \left(-\frac{a}{x_P^3}, 0{,}0\right)$, где $a = \frac{v_A^2 l_P^4}{l^2}$.

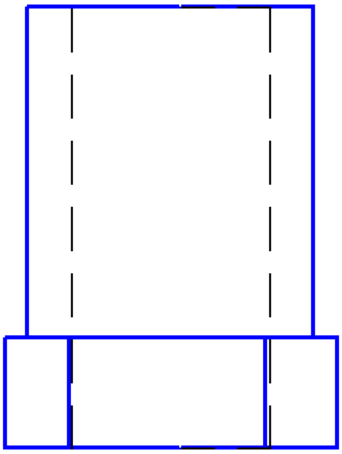
Критерии: Итоговый балл находится суммированием следующих оценок промежуточных этапов решения. Записана теорема Ривальса – 2 балла. Найдена угловая скорость стержня – 2 балла. Найдено угловое ускорение стержня 3 балла. Найдено ускорение точки P – 2 балла.

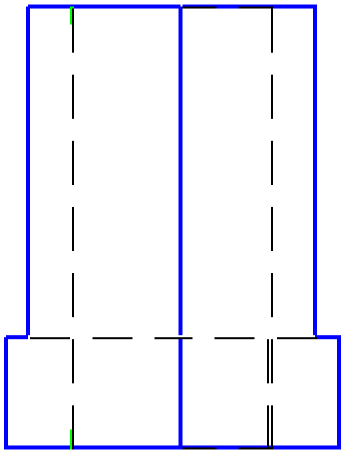
Тематический блок 2. Инженерная графика и основы конструирования

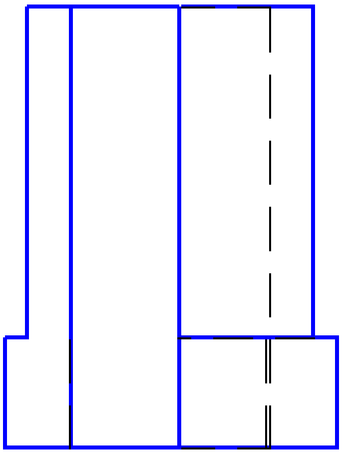
Задача 1. (1 балл)

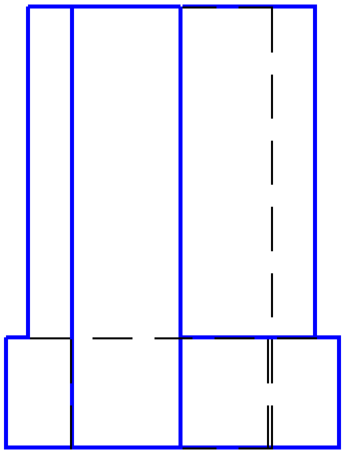


Дана трёхмерная модель детали.
Указать проекционный вид на обозначенную плоскость


а)


б)

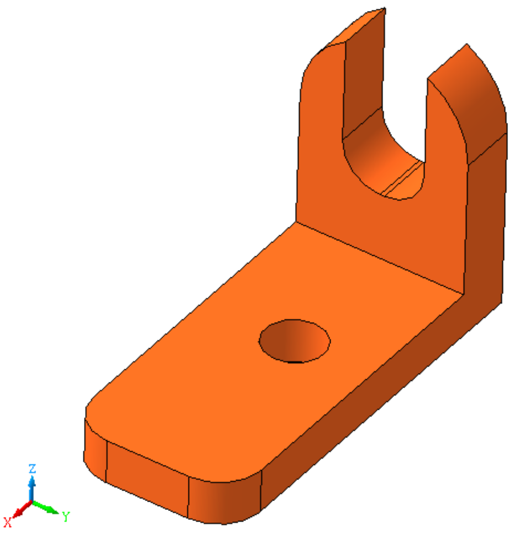

в)

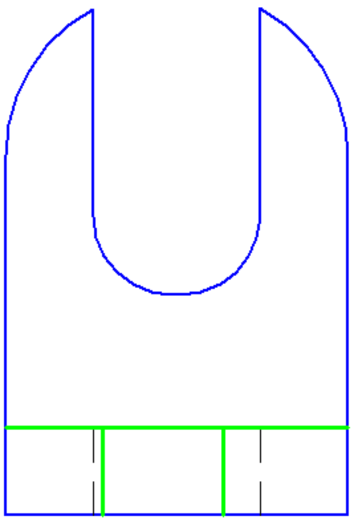

г)

Ответ: г)

<u>Задача 2. (1 балл)</u>

Дана деталь. Указать, какую линию чертежа следует использовать на месте зеленых линий, обозначенных на проекции.





а)

б)

в)

г)

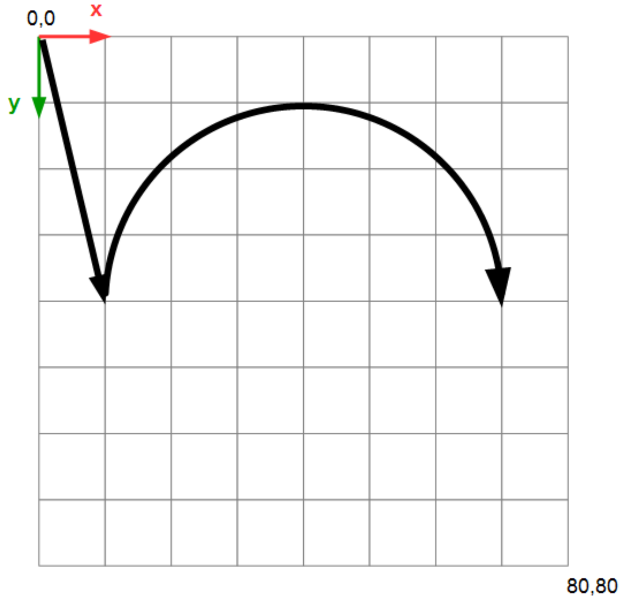
Ответ: в)

Задача 3. (1 балл)

Дан текст программы для сверлильного станка с ЧПУ на языке G-CODE:

```
G01 X10 Y40
G0_ X70 Y40
```

В результате выполнения команд происходит перемещение сверла по заданной траектории. Считать, что изначально сверло находится в точке (0,0).



указать символ, пропущенный в программе на месте “_”.

а) 1
б) 2
в) 3
г) 7

Ответ: б)

Задача 4. (2 балла)

Какие из представленных деталей являются дисками

а)

б)

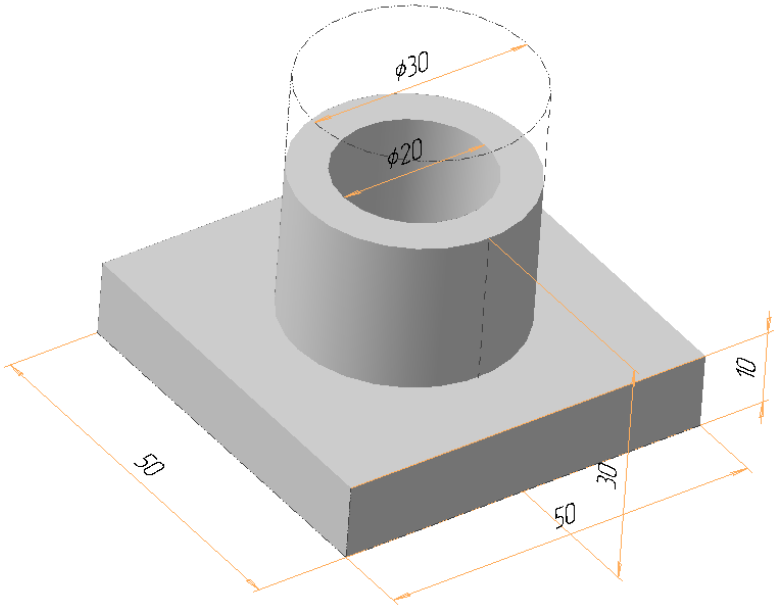
в)

г)

Ответ: б) и в).

Задача 5. (9 баллов)

На 3D-принтере напечатали деталь, размеры которой (в милиметрах) представлены на рисунке. Отверстие сквозное. Деталь изготовлена из ABS пластика плотностью 0.00104 г/мм^3.



Вычислить массу детали, если заполнение составляет 25%. Ответ выразить в граммах, округлить до целого в большую сторону. При расчётах принять π=3.14.

Решение:

Деталь складывается из нескольких частей, объёмы которых необходимо вычислить.

Размеры выразим в милиметрах.

Объём основания:

$V = l \cdot w \cdot h$, где l – длина, w – ширина, h – высота основания.

$V_{осн} = 50 \cdot 50 \cdot 10 = 25000$ (мм^3)

Объёмы цилиндрических элементов вычисляем по формуле:

$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, где r – радиус цилиндра, h – высота цилиндра

Верхняя цилиндрическая часть имеет объём:

$V_{верх} = 3.14 \cdot (30/2)^2 \cdot 20 = 14130$ (мм^3)

Отверстие имеет объём:

$V_{отв} = 3.14 \cdot (20/2)^2 \cdot 30 = 9420$ (мм^3)

Объём детали вычисляется как:

$V = V_{осн} + V_{верх} - V_{отв} = 25000 + 14130 - 9420 = 29710$ мм^3

Учитывая, что деталь не монолитная, а заполнена с коэффициентом заполнения k, то фактический объём материала составляет:

$V_{факт} = k \cdot V$

$V_{факт} = 0.25 \cdot 29710 = 7427.5$ (мм^3),

тогда масса детали

$m = \rho \cdot V_{факт}$

$m = 0.00104 \cdot 7427.5 = 7.7246$ (г).

Округляя до целого в большую сторону, получаем массу 8 г.

Ответ: 8

Тематический блок 3. Механика деформируемого твердого тела

Задача 1. (1 балл)

Какова размерность напряжения, выраженная через основные единицы длины L, времени T, массы M. $[\sigma] = ?$

Решение. Размерность напряжения равна размерности давления (сила, отнесенная к площади).

$$[\sigma] = \frac{M}{T^2 L}.$$

Задача 2. (1 балл)

Найти реакцию в шарнирной опоре для балки длиной l, показанной на рис. 1. Принять $a = l/2$.

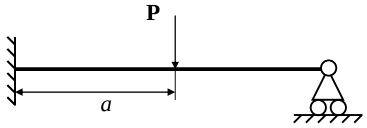


Рис. 1.1

Решение. Система статически неопределима и требует одного дополнительного уравнения к системе уравнений статики. Заменим связи соответствующими реакциями (рис. 2) и составим систему уравнений.

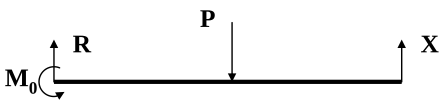


Рис. 1.2

Уравнения статики:

$$M_0 = -Pa + Xl, \tag{1.1}$$

$$R_0 = -P + X. \tag{1.2}$$

Дополнительное уравнение дает теорема Кастильяно:

$$\frac{\partial W}{\partial X} = 0. \tag{1.3}$$

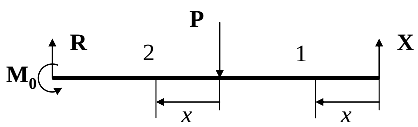


Рис. 1.3

Найдем внутренний изгибающий момент $M(z)$ в произвольном сечении балки. Удобно разбить балку на две части и координату отсчитывать от правого конца, чтобы исключить влияние реакций на левом конце

Для области 1 ($0 < z < l - a$):

$$M(z) = Xz. \qquad (1.4)$$

Для области 2 ($0 < z < a$):

$$M(z) = X(l - a + z) - Pz. \qquad (1.5)$$

Подставим выражения (1.4) и (1.5) в (1.3), получим

$$\int_0^l M\frac{\partial M}{\partial X}dz = \int_0^{l-a} M\frac{\partial M}{\partial X}dz + \int_0^a M\frac{\partial M}{\partial X}dz =$$

$$= \int_0^{l-a} Xz^2dz + \int_0^a \left(X(l-a+z) - Pz\right)(l-a+z)dz = 0.$$

Беря интеграл, получим искомую реакцию

$$X = \frac{P}{2}\left(\frac{3(l/a)-1}{(l/a)^3}\right). \qquad (1.6)$$

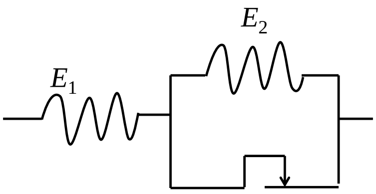
При $a = l/2$, получаем $X = \frac{5}{16}P$.

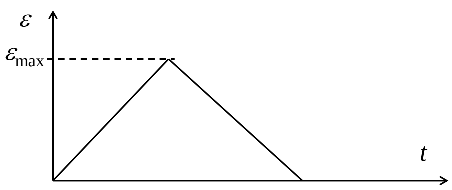
Нужно выбрать один верный ответ из предложенных вариантов

$X = \frac{5}{16}P$ $X = \frac{5}{8}P$ $X = \frac{3}{16}P$ $X = \frac{4}{25}P$

Задача 3. (1 балл)

Стержень из пластичного материала (см. схему на рисунке) подвергают продольной деформации по закону, показанному на рисунке. Предел текучести элемента сухого трения $\sigma_0 < E_1\varepsilon_{max}$. Найти количество теплоты Q (Дж/м^3), рассеянной в рассматриваемом процессе. Пусть $E_1 = E_2 = 8\sigma_0$, $\varepsilon_{max} = 1.01\sigma_0/E_1$, $\sigma_0 = 10^8$Па.

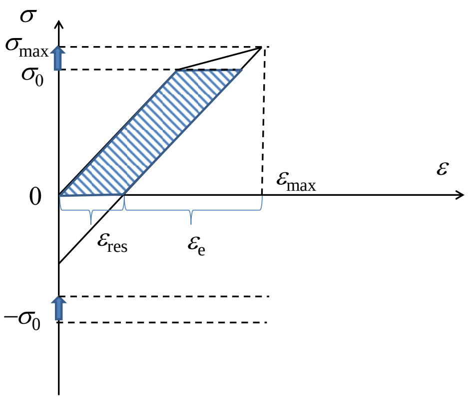




Решение.

Искомая величина равна площади заштрихованной фигуры на рисунке.

$Q = \sigma_0\varepsilon_{res}$.



Из рисунка очевидно, что

$\varepsilon_{res} = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_e$

$\varepsilon_e = \sigma_{\max} / E_1$

$\sigma_{\max} = \sigma_0 + (\varepsilon_{\max} - \sigma_0 / E_1) \dfrac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}.$

Окончательно

$$Q = \sigma_0 \left(\varepsilon_{\max} - \sigma_0 / E_1 + (\varepsilon_{\max} - \sigma_0 / E_1) \frac{E_2}{E_1 + E_2} \right) = \sigma_0 (\varepsilon_{\max} - \sigma_0 / E_1) \left(1 + \frac{E_2}{E_1 + E_2} \right) = 1.5 \cdot 10^6 \, Па \, .$$

Выбрать один правильный числовой ответ.

$1.5 \cdot 10^6$

10^7

$3 \cdot 10^6$

$1.5 \cdot 10^5$

Задача 4. (2 балла)

Рассмотрим консольно закрепленную балку длиной l со свободным концом. Пусть к балке на расстоянии a от закрепленного конца приложена внешняя сосредоточенная сила P. Изначально балка была строго горизонтальна. Требуется найти отклонение свободного конца балки y_1 и отклонение точки приложения силы y_2 по вертикали от первоначального положения (см. рис. 3.1).

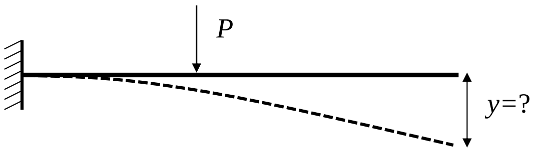


Рис. 2.1

Для решения задачи удобно балку разбить на два участка, как показано на рис. 3.2. На том же рисунке показана эпюра внутреннего изгибающего момента. Используя дифференциальное уравнение упругой линии балки, можно найти общий вид решения на каждом участке. Константы интегрирования определяем из граничных условий и условий сшивки на границе участков (на границе должны совпадать значения y, а также y').

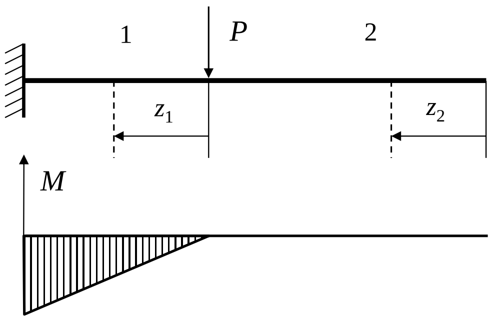


Рис. 3.2

На участке 1 внутренний изгибающий момент равен

$$M_x(z_1) = -Pz_1 . \qquad (3.1)$$

Тогда, с учетом (18), получим общее выражение для упругой линии балки на этом участке:

$$EI_x y' = -P\frac{z_1^2}{2} + C, \qquad (3.2)$$

$$EI_x y = -P\frac{z_1^3}{6} + Cz_1 + C_1. \qquad (3.3)$$

Из граничных условий: $y(z_1 = a) = 0$, $y'(z_1 = a) = 0$ получим $C = Pa^2/2$, $C_1 = -Pa^3/3$. Тогда окончательно

$$EI_x y = -P\frac{z_1^3}{6} + P\frac{a^2 z_1}{2} - P\frac{a^3}{3}. \qquad (3.4)$$

На участке 2 внутренний изгибающий момент равен нулю. Тогда

$$y = Az_2 + A_1. \qquad (3.5)$$

Из сшивки (3.4) и (3.5) на границе участков при $z_2 = l - a$, с другой стороны при $z_1 = 0$, уточняем коэффициенты. Искомые перемещения будут равны

$$y_1 = y(z_2 = 0) = A_1 = -\frac{Pa^2}{EI_x}\left(\frac{l}{2} - \frac{a}{6}\right). \qquad (3.6)$$

$$y_2 = y(z_1 = 0) = -\frac{Pa^2}{3EI_x}$$

При $a = l/2$, $y_1 = -\frac{5Pl^3}{48EI_x}$, $y_2 = -\frac{Pl^2}{12EI_x}$

Нужно выбрать из 4х вариантов 2 правильных:

$y_1 = -\frac{5Pl^3}{48EI_x}$, $y_2 = -\frac{Pl^2}{12EI_x}$

$y_1 = -\frac{5Pl^3}{24EI_x}$, $y_2 = -\frac{Pl^2}{3EI_x}$

Задача 5. (11 баллов)

Дан полый шар из изотропного упругого материала, внутренняя и внешняя поверхность которого представляет собой концентрические сферы радиусом *a* и *b* соответственно. В полости шара действует давление p_a, а к внешней поверхности шара приложено давление p_b. Найти напряженное состояние шара, если $a << b$.

Решение:

В задаче имеется сферическая симметрия, когда все величины зависят от текущего радиуса r. Заметим, что граничные условия даны в напряжениях. Значит, сформулированную задачу естественно решать в напряжениях. Поставим в условие совместности деформаций

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0$$

компоненты деформации, выраженные через напряжения с помощью закона Гука:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(T_r - 2\nu T_\theta), \qquad (4.1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(T_\theta - \nu\left(T_r + T_\theta\right)\right). \qquad (4.2)$$

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)T_\theta - \nu T_r\right) - \frac{1}{r}\left(T_r - T_\theta\right)(1+\nu) = 0. \tag{4.3}$$

С помощью уравнения равновесия

$$\frac{\partial T_r}{\partial r} + 2\frac{T_r - T_\theta}{r} = 0$$

приводим (4.3) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(T_r + 2T_\theta\right) = 0, \tag{4.4}$$

которое не содержит упругих констант. Интегрируя, получим условие

$$T_r + 2T_\theta = C, \tag{4.5}$$

где C – константа интегрирования. Сумма $T_r + 2T_\theta$ – это след тензора напряжений. Таким образом, согласно (4.5) след тензора напряжений в данной задаче от расстояния от центра не зависит и определяется только граничными условиями. Выражая компоненту T_θ из (4.5) и подставляя ее в уравнение равновесия, получим уравнение для компоненты T_r :

$$\frac{\partial}{\partial r}T_r + \frac{3}{r}T_r - \frac{C}{r} = 0. \tag{4.6}$$

Решение дифференциального уравнения (4.6) может быть легко найдено и имеет вид

$$T_r = \frac{C}{3} + \frac{C_1}{r^3}, \tag{4.7}$$

где C_1 – еще одна константа интегрирования. Определим константы C_1 и C из граничных условий. На внутренней границе $T_r = -p_a$, на внешней $T_r = -p_b$. Тогда из (4.7) получим

$$C = 3\frac{a^3 p_a - b^3 p_b}{b^3 - a^3} \approx -3p_b, \tag{4.8}$$

$$C_1 = \frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}\left(p_b - p_a\right) \approx a^3\left(p_b - p_a\right). \tag{4.9}$$

Подставляя найденные значения напряжений в (4.1) и (4.2), найдем компоненты тензора напряжений.

Ответ: $T_r \approx -p_b - \left(p_a - p_b\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3$

$$T_\theta \approx -p_b + \frac{1}{2}\left(p_a - p_b\right)\left(\frac{a}{r}\right)^3$$

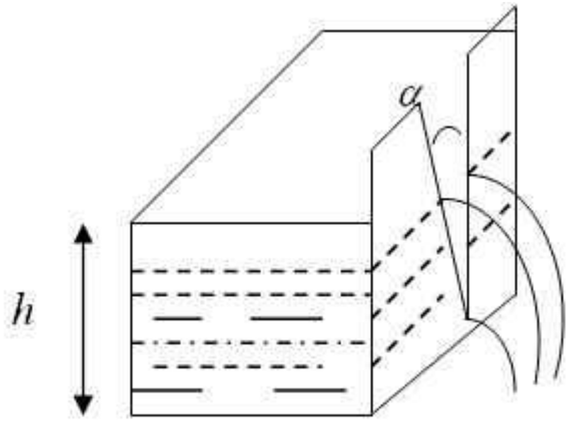
Вывести формулы самостоятельно.

Критерии

Тематический блок 4. Механика жидкости и газа

Задача 1. (Анализ размерностей 1 балл)

Используя анализ размерностей найти весовой расход G через водослив с острой кромкой, представляющей угловой вырез в вертикальной стенке. Величина угла выреза равна α. Вершина выреза находится на глубине h по отношению к уровню жидкости далеко от водослива.



1) $G = f(\alpha)\rho g^{3/2}h^{3/2}$
2) $G = f(\alpha)\rho g^{3/2}h^{5/2}$ +
3) $G=g^{3/2}h^{5/2}$
4) $G=g^{½}h^{5/2}$

Ответ: 2) $G = f(\alpha)\rho g^{3/2}h^{5/2}$

Решение

Весовой расход определяется, как $G = Q\,g$, где Q – массовый расход , g – ускорение свободного падения. Размерность весового расхода $[G]=[Q][g]$

Основными параметрами по условию задачи, определяющими весовой расход, являются: ρ - плотность, g – ускорение свободного падения, глубина h.

Определим их размерность в классе MLT.

$[G] = \frac{[M]}{[T]}\frac{][L]}{[T]^2} = \frac{[M][L]}{[T]^3}$; $[\rho] = \frac{[M]}{[L]^3}$; $[g] = \frac{[L]}{[T]^2}$; $[h] = [L]$.

$$[G] = f(\alpha)\,[\rho]^{\beta}[g]^{\gamma}\,[h]^{\delta}$$

$$\frac{[M][L]}{[T]^3} = \frac{[M]^{\beta}}{[L]^{3\beta}}\frac{[L]^{\gamma}}{[T]^{2\gamma}}\frac{[L]^{\delta}}{}$$

Сопоставим показатели степени при M, L и T

M: $1 = \beta$
L: $1 = -3\beta + \gamma + \delta$
T: $-3 = -2\gamma$

$$\beta = 1, \gamma = \frac{3}{2}, \delta = \frac{5}{2}$$

$G = f(\alpha)\rho g^{3/2}h^{5/2}$

Задача 2. (Теория идеальной жидкости, 1 балл)

Найти скорость стационарного истечения из бака идеальной жидкости под действием силы тяжести. Если площадь сечения отверстия $s=1$ $м^2$, площадь поверхности воды в баке $S = 25$ *м*^{2}, расстояние от отверстия бака до поверхности $h=45$ *м*, ускорение свободного падения $g = 10$ *м/с*^{2}

Скорость выразить в м/с, округлив до целого числа.

1) 30 м/с +
2) 8 м/с
3) 2 м/с
4) 1 м/с

Ответ: 30 м/с

Решение

Пусть U_1 скорость понижения жидкости в баке у поверхности.

U_2 – скорость стационарного истечения из отверстия бака.

Запишем уравнение неразрывности: $S \cdot U_1 = s \cdot U_2$

Т.к. истечение стационарное, выполняется уравнение Бернулли:

$$P_0 + \frac{\rho U_1^2}{2} + \rho g h_1 = P_0 + \frac{\rho U_2^2}{2} + \rho g h_2$$

где P_0 - атмосферное давление, h_1-h_2=h

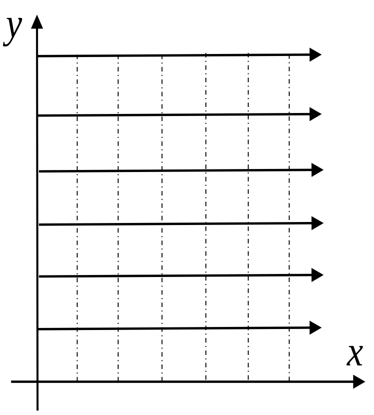
Решив систему из двух уравнений, получим:

$$U_2 = \sqrt{\frac{2gh}{\left(1-\frac{s^2}{S^2}\right)}},$$

Подставив численные значения и округлив до целых, получим $U_2 = 30$ м/с.

<u>Задача 3. (Теория идеальной жидкости, 1 балл)</u>

Выбрать комплексный потенциал, который соответствует картине течения на рисунке, где сплошной линией изображены линии тока, пунктирной - линии равного потенциала



1) $w = az, a > 0$ +

2) $w = \frac{a}{z}, a > 0$

3) $w = a\,lnz, a > 0$

4) $w = a\,lnz, a < 0$

Ответ: 1) $w = az, a > 0$

Решение По определению комплексного потенциала можно записать:

$\varphi + i\psi = ax + ayi$.

Линии тока лежат на прямых параллельных оси *x* и имеют следующий вид:
$\psi = ay = const$

Линии равного потенциала лежат на прямых, параллельных оси *y* и имеют следующий вид:

$$\varphi = ax = const.$$

Скорость во всем потоке постоянна и при $a > 0$ компоненты скоростей определяются следующим образом:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$u = a, \qquad v = 0.$$

Комплексный потенциал $w = az$, с $a > 0$ соответствует однородному поступательному потоку, параллельному оси x.

Задача 4. (Теория движения сжимаемой жидкости, 2 балла)

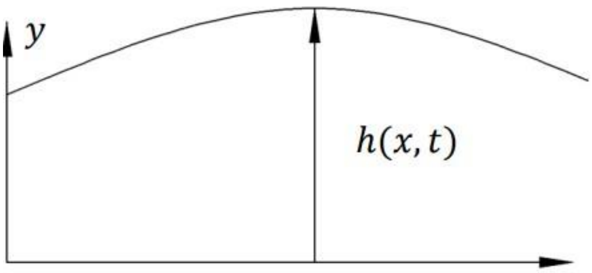
Уравнения движения идеального газа и мелкой воды совпадают, когда

1) $a = \sqrt{gh}$;+
2) $a = \sqrt{2gh}$;
3) $\gamma = 1$
4) $\gamma = 2$ +

Ответ: 1) $a = \sqrt{gh}$; 4) $\gamma = 2$

Решение .

Уравнения мелкой воды в одномерном случае:



$h_t + uh_x + hu_x = 0$
$u_t + uu_x + gh_x = 0$
Система близка к системе для сжимаемой жидкости, когда аналог скорости звука a
$a^2 = gh$
Перейдем от переменной h к переменной a
$h = a^2/g$;
$h_t = (2/g)\, aa_t$
$h_x = (2/g)\, aa_x$
$(2/g)\, aa_t + u\,(2/g)\, aa_x + (1/g)\, a^2 u_x = 0$

Для сжимаемой жидкости:
$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0$
$u_t + uu_x + (a^2/\rho)\,\rho_x = 0$

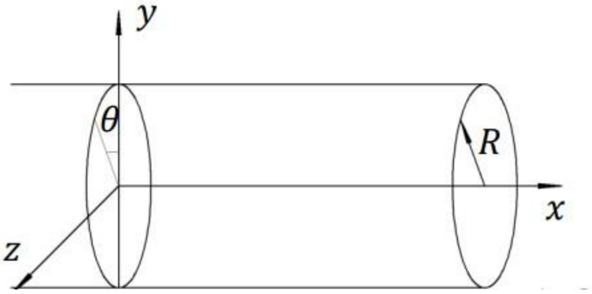
Для идеального газа :
$a_t + ua_x + au_x\,(\gamma - 1)/\,2 = 0$
$u_t + uu_x + 2\,aa_x\,/(\gamma - 1) = 0$

В дифференциальной форме записей уравнений теория мелкой воды совпадает с газовой динамикой с показателем адиабаты γ =2

Задача 5. (Теория движения вязкой жидкости, 9 баллов)

Рассмотреть плоское установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости вдоль (точное решение уравнений Навье - Стокса) круглой трубы, радиуса R, найти выражение для расхода и средней скорости по сечению трубы, а также их численные значения, считая радиус трубы равным R = 4 см, перепад давления dP/dx= 0.005 Па/м, динамическую вязкость μ=0.001 Па с. Расход выразить в см^3/с, округлив до целых, скорость в см/с, округлив до десятых. В ответ записать их численное значение.

Решение.



В цилиндрической системе координат:
$y = r\cos\theta$
$z = r\sin\theta$
$u = u(r)$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

Запишем уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости:

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{dP}{dx} = const \\ U_{r=R} = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}$$

$$r\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{r^2}{2} + C_1 lnr + C_2$$

Полагаем , что $C_1=0$, т.к. скорость $U(0)<\infty$

$$U(r)_{r=R}=\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4}+C_2=0;$$
$$C_2=-\frac{1}{\mu}\frac{dP}{dx}\frac{R^2}{4}$$
$$U(r)=-\frac{1}{4\mu}\frac{dP}{dx}(R^2-r^2)$$

Расход: $Q=\int_0^R\int_0^{2\pi}Urd\theta dr=-\frac{\pi}{8\mu}\frac{dP}{dx}R^4$

Средняя скорость по сечению: $u=\frac{Q}{\pi R^2}=-\frac{1}{8\mu}\frac{dP}{dx}R^2$

Ответ: Q=5 см^3/с , 0.1 см/с

Тематический блок 5 Теория автоматического управления

Задача 1. (1 балл)

Для доказательства устойчивости точки (0, 0) следующей динамической системы какую функцию кандидата Ляпунова можно использовать?

$$\frac{dx_1}{dt}=-x_1x_2^2,\qquad \frac{dx_2}{dt}=-x_2-x_2x_1^2$$

А) $V=x_2x_1$
Б) $V=x_1^2-x_2^2$
В) $V=x_1^4+x_2^4$
Г) $V=x_1^2+x_2^2$

Ответ: Г)

Решение: Чтобы проверить устойчивость с помощью прямого метода Ляпунова, следующее должно быть выполнено: $V(0)=0, V(x)>0$ и $\dot{V}(x)\leq 0$.

Критерий оценки: ответ (Г) – 1 балл; (А) или (Б) или (В) – 0 баллов.

Задача 2. (1 балл)

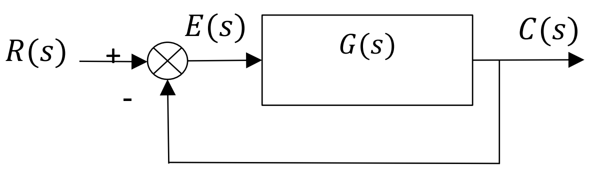
Для линейного осциллятора с динамическим уравнением $m\ddot{x}+cx=F(t)$ (где m и c масса коэффициент упругости и $F(t)$ сила управления) рассмотрим функционал $\Phi\left(t_f,x\left(t_f\right)\right)=x\left(t_f\right)$ для максимизации. Каково предлагаемое оптимальное управление $u=\frac{F(t)}{m}$ должно быть применено? Обратите внимание, что$|u|<u^*$и ω- это частота осциллятора.

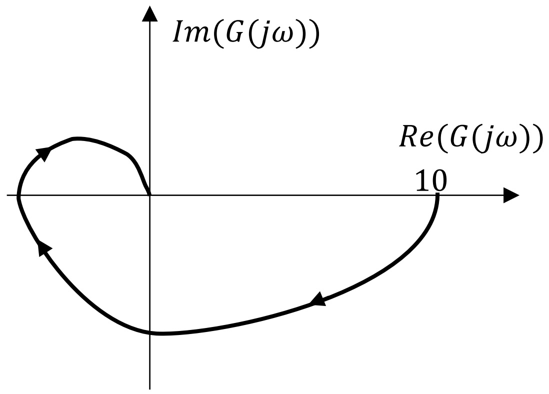
А) $u=\frac{1}{2}u^*sign(\sin(\omega(t-t_f)))$
Б) $u=u^*\sin(\omega(t))$
В) $u=u^*sign(\sin(\omega(t-t_f)))$
Г) $u=u^*\sin(\omega(t-t_f))$

Решение: После формирования гамильтониана и применения условий оптимальности управление оказывается релейным и можно показать, что знак изменяется с изменением знака $\sin(\omega(t - t_f))$. Это известный пример, который упоминается в классических источниках теории управления.
Критерий оценки: ответ (В) – 1 балл; (А или (Б) или (Г) – 0 баллов.

Задача 3. (1 балл)

Графика Найквиста функции $G(s)$ представлена. Какова установившаяся ошибка системы с обратной связью для переходного процесса?



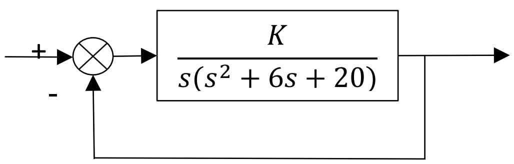


А) 0
Б) $\frac{1}{11}$
В) $\frac{1}{10}$
Г) 1

Решение: Поскольку $GH(0) = 10$ то установившаяся ошибка данной системы составляет $.E = \frac{1}{1+GH(0)} = \frac{1}{11}$
Ответ: Б)
Критерий оценки: ответ (Б) – 1 балл; (А) или (В) или (Г) – 0 баллов.

Задача 4. (2 балла)

Определить какие значения K в данной системе обеспечивают расположение полюсов системы левее прямой $\sigma = -1$?



А) 25
Б) 40
В) 120

Г) 10

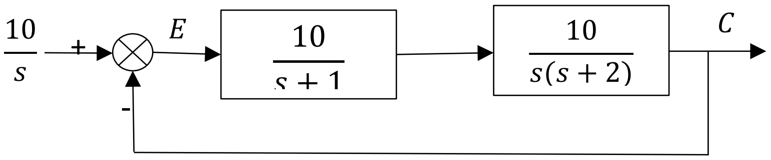
Ответ: А) и Б)

Решение: Сначала необходимо найти характеристическое уравнение для системы с обратной связью. Затем, изменяя $s \to s-1$ и, используя метод Рауса-Гурвица, можно найти $15 < K < 48$ для обеспечения устойчивости системы:

Критерий оценки: ответ (А) и (Б) – 2 балла; (В) или (Г) – 0 баллов.

Задача 5. (9 баллов)

Для системы управления найдите установившееся значение $C(t \to \infty)$ ошибку в установившемся состоянии $E(t \to \infty)$



А) 10, 0

Б) 0.975, 10

В) 1000, 10

Г) 0, 20

Решение:

Для решения проблемы с обратной связью $H(s) = 1$ и $G(s) = \frac{10}{s+1} * \frac{10}{s(s+2)}$ и учитывая $\frac{10}{s} - C(s) = E(s)$ можно использовать свойство преобразования Лапласа, которое позволяет записать: $\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s)$ и также $\lim_{t\to\infty} c(t) = \lim_{s\to 0} sC(s)$.

Из блок-схемы можно получить, что: $C(s) = G(s)E(s)$ (*) и ($\frac{10}{s} - C(s)$)G(s)=C(s) (**):

$$(**) \to C(s) = \frac{G(s)\frac{10}{s}}{1 + G(s)H(s)} \quad \Rightarrow C = \lim_{s\to 0} \frac{sG(s)\frac{10}{s}}{1 + GH(s)}$$

$$(*) \to E(s) = \frac{\frac{10}{s}}{1 + G(s)H(s)} \quad \Rightarrow E = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{10}{s}}{1 + GH(s)}$$

необходимо выполнить подстановку и вычислить пределы:

$$C = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{10}{s+1} * \frac{10}{s(s+2)} \frac{10}{s}}{1 + \frac{10}{s+1} * \frac{10}{s(s+2)}} = 10$$

$$E = \lim_{s\to 0} \frac{s\frac{10}{s}}{1 + \frac{10}{s+1} * \frac{10}{s(s+2)}} = 0$$

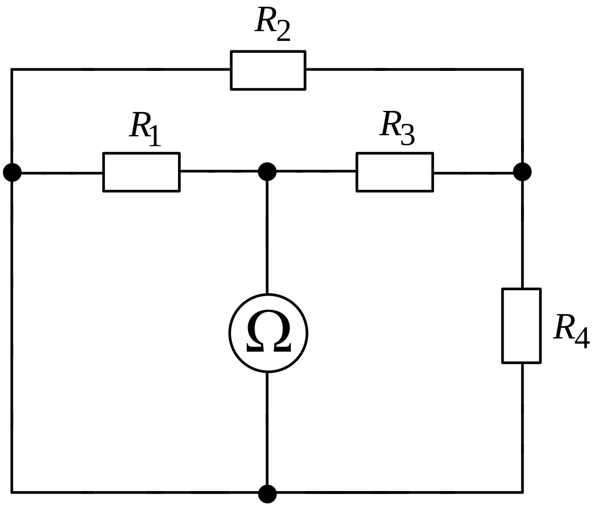
Ответ: А)

Критерий оценки:
1) Для выражения прироста G(s): 2 балла.
2) Выразить C(s) и E(s): (1+1)(для каждого) = 2 балла.
3) Записать Теорему о конечном значении: 3 балла.
4) Нахождение пределов $\lim\limits_{s\to 0} sC(s)$ и $\lim\limits_{s\to 0} sE(s)$ и нахождение правильных конечных ответов: (2+2+3)(если все предыдущие шаги верны) + (1+1) (по одному баллу за E(s) и C(s)) = 9 баллов.

Тематический блок 6 Электротехника

Задача 1. (1 балл)

Приведена схема цепи постоянного тока. Определите показание идеального омметра, если $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 2$ Ом, $R_4 = 4$ Ом.



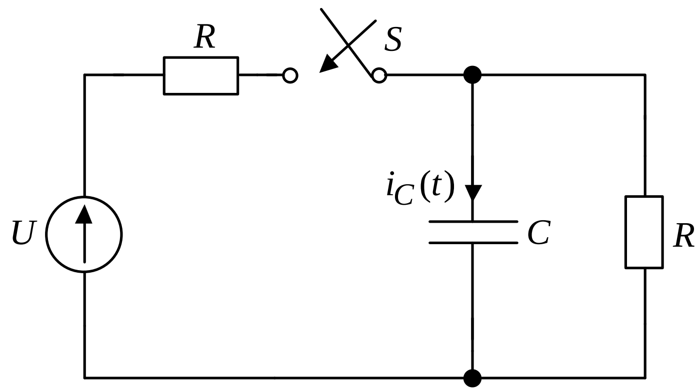
Решение:

$$R_\Omega = \frac{\left(R_3 + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4}\right)R_1}{R_1 + R_3 + \frac{R_2R_4}{R_2+R_4}} = \frac{\left(2 + \frac{16}{4+4}\right)4}{4 + 2 + \frac{16}{4+4}} = 2 \text{ Ом}$$

Ответ: 2 Ом

Задача 2. (1 балл)

В цепи напряжение источника $U = const$. Конденсатор не заряжен. После замыкания идеального ключа S определите выражение для тока конденсатора $i_C(t)$.



Решение:

Рассмотрим режим до коммутации при $t = 0-$

$u_c(0-) = 0$ В, $i_c(0-) = 0$ А

Рассмотрим режим после коммутации при $t = 0+$

$u_c(0+) = u_c(0-) = 0$ В $\rightarrow$ С $\equiv$ КЗ

$i_c(0+) = \frac{U}{R}$

Рассмотрим вынужденный режим при $t \rightarrow \infty$, С $\equiv$ ХХ

$i_c(\infty) = 0$ А

$i_c(t) = i_c(\infty) + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

$\mathrm{A} = i_c(0+) - i_c(\infty) = \frac{U}{R}$

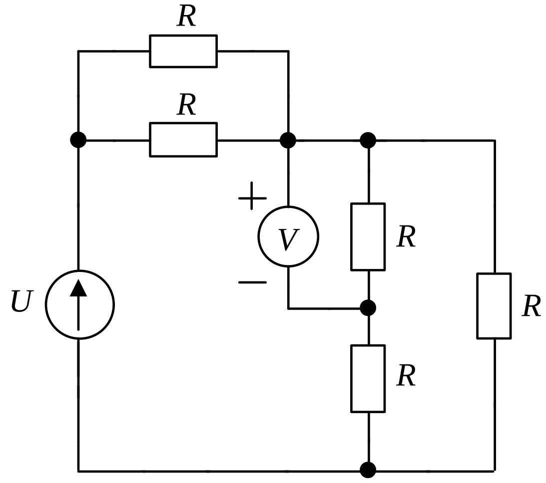
Расчет постоянной времени при $t > 0$

$R_э = \frac{R}{2}, \tau = \mathrm{C}R_э = \frac{R\mathrm{C}}{2} \rightarrow i_c(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{2}{RC}t}$

Ответ: $i_C(t) = \frac{U}{R}e^{-\frac{2}{RC}t}$, А

<u>Задача 3. (1 балл)</u>

Приведена схема цепи постоянного тока. Определите показание идеального вольтметра.



Решение:

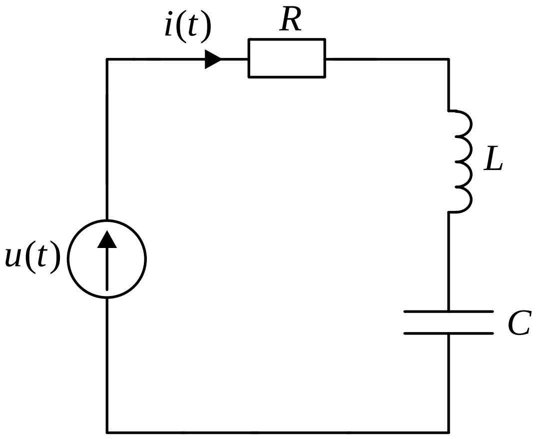
$$U_V = U\frac{\frac{(R+R)R}{3R}}{\frac{R}{2}+\frac{(R+R)R}{3R}}\frac{1}{2} = U\frac{\frac{R}{3}}{\frac{R}{2}+\frac{2R}{3}} = U\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = U\frac{1/3}{7/6} = \frac{2U}{7}$$

Ответ: $U_V = \dfrac{2U}{7}$

Задача 4. (2 балла)

В цепи напряжение источника $u(t) = 100\cos\left(\dfrac{t}{4}\right)$, В.

Параметры цепи: $R = 1$ Ом; $L = 4$ Гн; $C = 2$ Ф. Определите $Z_{вх}$, $i(t)$.



Решение:

$Z_R = R = 1$ Ом, $Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -j2$ Ом, $Z_L = j\omega L = j$ Ом

$Z_{вх} = Z_R + Z_L + Z_C = 1 - j$ Ом

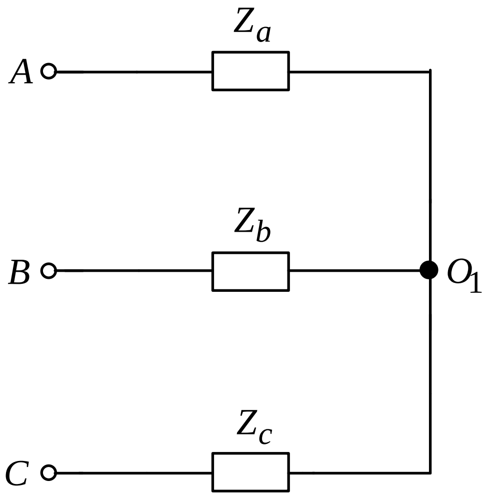
$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z_{вх}} = \frac{100}{1-j} = 50 + j50 = 50\sqrt{2}e^{j45^\circ} \div 50\sqrt{2}\cos\left(\frac{t}{4} + 45^\circ\right) \text{ А}$$

Ответ: $Z_{вх} = 1 - j$ Ом; $i(t) = 50\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{t}{4} + 45^\circ\right)$, А

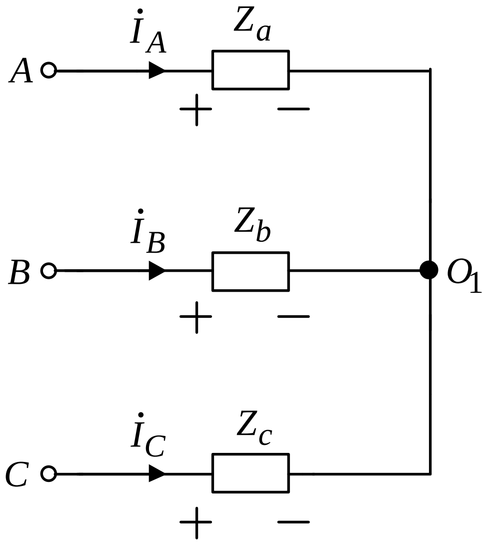
Задача 5. (9 баллов)

В цепи трехфазный источник питания – симметричный, порядок чередования фаз – прямой (ABC).

Фазное напряжение источника питания $U_A = 220$ В. Определите комплекс полной мощности трехфазной цепи, если $Z_a = 10$ Ом; $Z_b = j20$ Ом; $Z_c = -j10$ Ом.



Решение:



$\dot{U}_A = 220e^{j90^\circ} = j220$ В, $\dot{U}_B = 220e^{-j30^\circ} = 110\sqrt{3} - j110$ В,
$\dot{U}_C = 220e^{-j150^\circ} = -110\sqrt{3} - j110$ В
$\dot{U}_{O_1} = \frac{\dot{U}_A Y_a + \dot{U}_B Y_b + \dot{U}_C Y_c}{Y_a + Y_b + Y_c} = 17{,}685 - j74{,}631$ В
$\dot{I}_A = (\dot{U}_A - \dot{U}_{O_1})Y_a = -1{,}768 + j29{,}463$ А
$\dot{I}_B = (\dot{U}_B - \dot{U}_{O_1})Y_b = -1{,}768 - j8{,}642$ А
$\dot{I}_C = (\dot{U}_C - \dot{U}_{O_1})Y_c = 3{,}537 - j20{,}821$ А
$\tilde{S} = \dot{U}_A \overset{*}{I}_A + \dot{U}_B \overset{*}{I}_B + \dot{U}_C \overset{*}{I}_C \approx 8709 - j2902$ ВА
Ответ: $\tilde{S} \approx 8709 - j2902$ ВА

Тематический блок 7 Электроника

Задача 1. (1 балл)

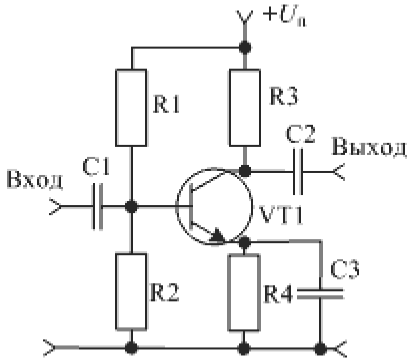
Какие частоты у сотовой связи?

Ответ. 1.

1. 0,9 – 5,0 ГГц.
2. 50 Гц.
3. 27,135 МГц.
4. 10 МГц.
5. 470 – 790 МГц.
6. 456 КГц.

Задача 2. (1 балл)

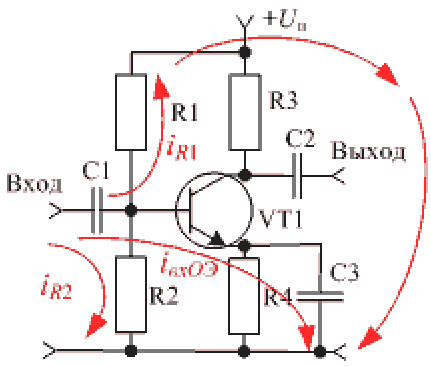
Для входной цепи транзисторного усилителя с общим эмиттером функционирующего на средней частоте найдите входное сопротивление $R_{вх}$, если R1 = 10 кОм, R2 = 20 кОм, $R_{вхОЭ}$ = 1,5 кОм, Uп = 9 В.



Ответ: 2.

1. 892 Ом.
2. 1224,5 Ом.
3. 934 Ом.
4. 910 Ом.
5. 983 Ом.
6. 968 Ом.

Решение. На средних частотах входная емкость транзистора не оказывает влияния, поэтому мы ее не учитываем. Сопротивление конденсатора С3 на средних частотах $R_{C3}=1/\omega C=1/2\pi f$ близко к нулю. Для наглядности изобразим токи по всем цепям.



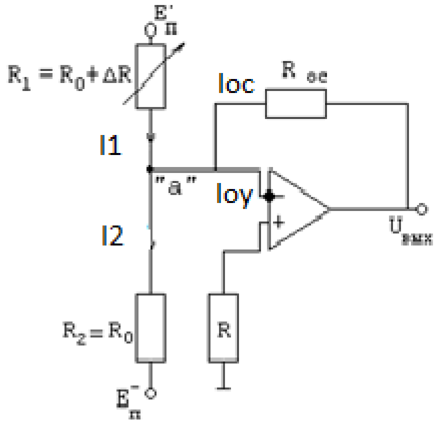
Т.к. все элементы схемы параллельны, то $R_{вх} = R1\ R2\ R_{вхОЭ} /(R1\ R2 + R2\ R_{вхОЭ} +$

$R1\ R_{вхОЭ}) = 10\ 10^3\ 20\ 10^3\ 1,5\ 10^3/(10\ 10^3\ 20\ 10^3 + 1,5\ 10^3\ 2010^3 + 10\ 10^3\ 1,5\ 10^3) =$

1224,5 Ом.

Задача 3. (1 балл)

Для измерения деформации используется усилитель сигнала тензорезистора, R1 = R0 + ΔR, включенного в дифференциальную цепочку, в которой тензорезистор R2 = R0 и предназначен для компенсации внешних помех. Рассмотрите токи в узле “а” и найдите Uвых = *f*(ΔR), при условии, что операционный усилитель (ОУ) считается идеальным, т.е. $I_{оу}=0$, $U^{+}_{вх}=U^{-}_{вх} = 0$, а $|E^{+}_{п}| = |E^{-}_{п}| = E_{п} = 9$ В, сопротивление обратной связи (ОС) $R_{ос} = 1$ кОм, R0 = 400 Ом, максимальное изменение ΔR сопротивления R1 под внешней нагрузкой ΔR = 10 Ом.



Ответ. 1.

1. 0,60.
2. 1,28.
3. 1,02.
4. 3,09.
5. 0,76.
6. 2,04.

Решение. Согласно первому закону Кирхгофа для узла “а” запишем токи:

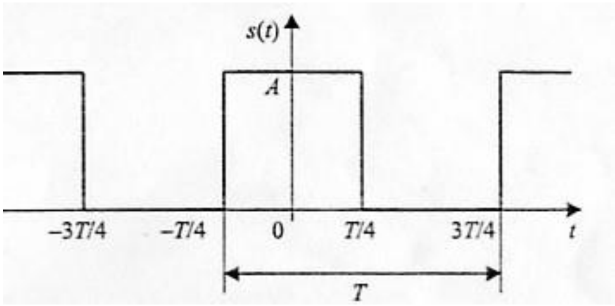
I1 – I2 = Iоу + Iос, где Iоу – ток ОУ, Iос – ток обратной связи.

$I1 = (E^{+}_{п} - U^{-}_{вх})/(R_0 – ΔR)$, $I2 = (E^{-}_{п} - U_{вх})/R_0$, а $I_{ос} = (U^{-}_{вх} - U_{вых})/R)$, тогда

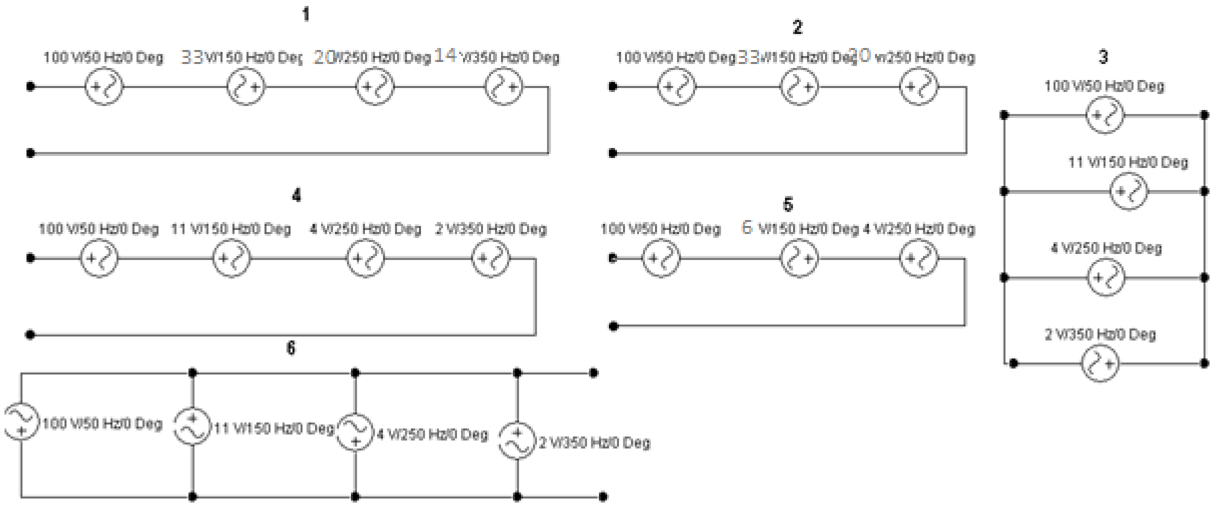
$(E^{+}_{п})/(R_0 – ΔR) - (E^{-}_{п})/R_0 = (– U^{+}_{вых})/R$,
$U_{вых} = - R_{ос} E(R_0 - R_0 – ΔR)/(R_0 – ΔR) R_0 = E.ΔR.R_{ос}/(R_0^2 – R_0 ΔR) = 9.10.10^3/(1{,}6\ 10^5 - 10^3 10) = 0{,}6$ В.

Задача 4. (2 балла)

Какое включение генераторов обеспечивает получение прямоугольного периодического сигнала? Воспользуйтесь формулой Фурье:



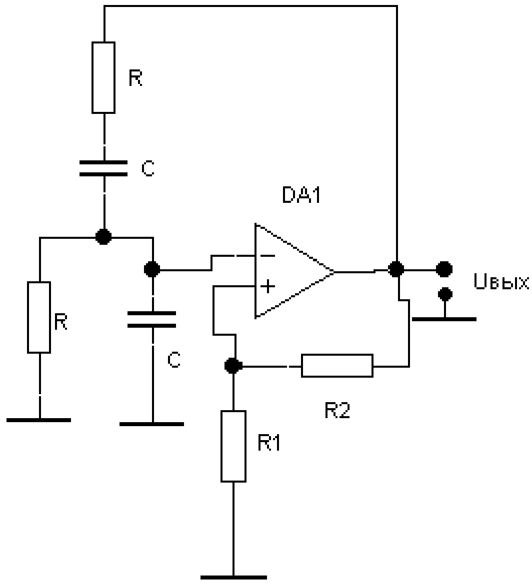
$$s(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right) - \frac{1}{3}\cos\left(3\frac{2\pi}{T}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(5\frac{2\pi}{T}t\right) - \ldots\right).$$



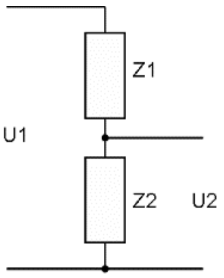
Ответ. 1 и 2.

<u>Задача 5. (9 баллов)</u>

Генератор с мостом Вина на операционном усилителе (ОУ) DA1 охвачен обратной связью, состоящей из последовательной RC-цепи, соединенной с параллельной RC-цепью с одинаковыми значениями конденсаторов C и резисторов R, создающими фазовую задержку или опережение фазы в зависимости от частоты *f*. Следует найти коэффициент усиления моста Вина K_U и частоту генерации *f*. Какие цепи моста Вина соответствуют звеньям фильтра нижних и верхних частот?



Решение. Положительная обратная связь (ОС) состоит из 2х соединённых между собой RC цепочек, последовательной и параллельной, которые образуют фильтр верхних частот, соединенный с фильтром нижних частот и являются селективным полосовым фильтром второго порядка. Рассмотрим мост Вина как частотно зависимый делитель напряжения. Приведем его эквивалентную схему.



K_U = U2/U1 = I Z2/[I (Z1 + Z2)], Z1 = R + 1/j ωC, Z2 = 1/(j ωC + 1). Тогда

K_U = [1/(j ωC + 1)]/[1/(j ωC + 1) + R + 1/j ωC] = 1/3 + j(ωRC – 1/ωRC) = 1/3.

При резонансе $\omega_p RC = 1/\omega_p RC$, $\omega_p = 1/RC = 2\pi f_p$, отсюда частота автоколебаний

$f_p = 1/2\pi RC$.

Коэффициент усиления по напряжению схемы ОУ должен быть равен или больше трех чтобы начались колебания, потому что, как мы видели выше, входной сигнал на выходе ослабевает до 1/3 его начального значения.

Оценка задачи:

1) За вычисление K_U -5 баллов,

2) За вычисление f_p - 1 балл,

3) За вычисление номиналов компонентов - 1 балл за каждый элемент,

4) Ответ на вопрос по фильтру частот - 2 балла.

5) За несоответствие номиналов резисторов и конденсаторов E24, минус балл за каждый неправильно именованный компонент.