Демонстрационный вариант заданий второго этапа по Профилю «Прикладная математика и искусственный интеллект»

1 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

1. Найти расстояние от точки $A = (1;5;1)$ до плоскости $2x + y - 2z - 5 = 0$.

   Ответ: 0.

   Максимальный балл: 4

2. Рассмотрим многочлен $p(x) = (x^2 - 3x + 2) \cdot q(x)$, где $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(\mathrm{q(x)}) > 0$. Какие из утверждений $p'(1) = 0$; $p'(1) \neq 0$; $p'(x) = (2x - 3) \cdot q'(x)$; $p'(\frac{3}{2}) = 0$ могут быть верны?

   (a) $p'(1) = 0$

   (b) $p'(1) \neq 0$

   (c) $p'(\frac{3}{2}) = 0$

   (d) $p'(x) = (2x - 3) \cdot q'(x)$

   Ответ: (a), (b), (c)

   Максимальный балл: 2

3. Рассмотрим $U, V \leqslant \mathbb{R}^4$: $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$ и $V = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Вычислите $\dim(\mathrm{U}^{\perp} + \mathrm{V}^{\perp})$.

   Ответ: 3.

   Максимальный балл: 2

4. Пусть $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{99}$ — все комплексные корни сотой степени из 1. Вычислите $\sum\limits_{k=0}^{99} \varepsilon_k$.

   Ответ: 0.

   Максимальный балл: 8

   Решение:

   Числа $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{99}$ образуют полный набор комплексных корней полинома $p(z) = z^{100} - 1$. По теореме Виета, $\sum\limits_{k=0}^{99} \varepsilon_k = 0$.

5. Дана матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Каково наибольшее количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих одному собственному числу, для данной матрицы?

   Ответ: 2.

   Максимальный балл: 2

2 Вещественный и комплексный анализ

1. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\pi} 7\,\mathrm{tg}(\frac{x}{4})dx + \int\limits_0^{7} 4\,\mathrm{arctg}(\frac{y}{7})dy$.

   Ответ: 7π.

   Максимальный балл: 4

2. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{x^2+3x-3}.)$

   Ответ: -2.

   Максимальный балл: 2

3. Для каких из перечисленных ниже функций многочлен Тейлора степени 1 в точке $x_0=0$ имеет вид $T(x)=2x+1$?

   (a) $(x+1)^2$
   (b) $\cos(2x)$
   (c) $\sin(2x+1)$
   (d) e^{2x}

   Ответ: (a), (d)

   Максимальный балл: 2

4. В какие области может под действием конформного отображения перейти круг с разрезом?

   (a) круг
   (b) полуплоскость
   (c) кольцо
   (d) прямоугольник

   Ответ: (a), (b), (d)

   Максимальный балл: 4

5. Найти максимум функции $f(x,y,z)=7x+4y+4z$ на сфере $x^2+y^2+z^2=81$.

   Ответ: 81.

   Максимальный балл: 2

3 Дифференциальные уравнения

1. Дано дифференциальное уравнение $y''+3y=\cos^2(x)$. Вычислить $\int\limits_0^{2\pi} y(x)\cos(2x)dx$.

   Ответ: $-\frac{\pi}{2}$.

   Максимальный балл: 2

2. Дана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=y+2z; & x(0)=1 \\ \dot{y}=-x+3z; & y(0)=2 \\ \dot{z}=-2x-3y; & z(0)=3 \end{cases}$$

   Вычислить $x^2(1)+y^2(1)+z^2(1)$.

   Ответ: 14.

   Максимальный балл: 2

3. Пусть известно, что функция

$$G(x,y)=\begin{cases} x(1-y), & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1; \\ (1-x)y, & 0<y<x<1 \end{cases}$$

   есть функция Грина задачи Штурма-Лиувилля на отрезке $[0,1]$ с граничным условием Дирихле. Для каких операторов Штурма-Лиувилля с краевыми условиями Дирихле функция $G(x,y)$ будет функцией Грина?

(a) $-u''$;
(b) $-2u''$,
(c) $-u'' + u$,
(d) $-u'' - u$,
(e) $-2u'' + u$;
(f) $-u'' - 2u$.

Ответ: (a).

Максимальный балл: 4

4. Какой может быть фундаментальная система решений для однородного уравнения, соответсвтующнго линейному дифференциальному уравнению 3 порядка с постоянными коэффициентами и правой частью xe^x?

(a) $\{1, e^x, xe^x\}$;
(b) $\{1, e^x, e^{3x}\}$;
(c) $\{x, e^x, e^{3x}\}$;
(d) $\{e^x, e^{-x}\}$;
(e) $\{e^{3x}; xe^{3x}; e^{-3x}\}$

Ответ: (a), (b), (e).

Максимальный балл: 2

5. Найти минимум функционала

$$\int_0^1 ((u'')^2 - 2u)\mathrm{dx}$$

при условиях $u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0$.

Ответ: $-\frac{1}{720}$

Максимальный балл: 5

4 Теория вероятностей и математическая статистика

1. Два автомата производят детали. Вероятность изготовления стандартной детали первым автоматом равна 0.85, вторым — 0.9. Производительность первого автомата в два раза больше производительности второго. Рабочий взял наугад деталь, и она оказалась стандартной. Какова вероятность, что эта деталь изготовлена первым автоматом? Ответ округлить до трех цифр после запятой.

Ответ: 0.654

Максимальный балл: 2

2. На склад отправлено 4000 годных изделий. Вероятность того, что изделие повредится в пути, равна 0.0005. Найти вероятность того, что из 4000 изделий на склад прибудут не более 2 испорченных изделий. Ответ округлить до двух знаков после запятой.

Ответ: 0.68

Максимальный балл: 2

3. Двумерная случайная величина (ξ, η) задана плотностью совместного распределения

$$f_{\xi,\eta}(x, y) = C\, e^{-x^2+2xy-y^2+1}, \quad x, y \in \mathbb{R}^2,$$

где $C \in \mathbb{R}$ — параметр.

Найти условное математическое ожидание $\mathsf{E}(\xi \mid \eta = 1)$ случайной величины ξ при условии, что $\eta = 1$.

Ответ: 1

Максимальный балл: 4

4. Правильная шестигранная игральная кость подбрасывается 20 раз. Найти коэффициент корреляции числа выпадений двойки и числа выпадений тройки.

   Ответ: $-\frac{1}{5}$

   Максимальный балл: 9

   Решение:

   Решим задачу в общем виде. Пусть сделано n подбрасываний кости.

   Обозначим через ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, случайную величину, равную числу выпадений грани с i очками при n подбрасываниях кубика. Посчитаем ковариацию $cov(\xi_2, \xi_4)$. Каждая из случайных величин ξ_i имеет биномиальное распределение с параметрами n и $1/6$, поэтому $\mathsf{E}(\xi_i) = n/6$, $\mathsf{D}(\xi_i) = 5n/36$.

   Далее заметим, что $\xi_1 + \ldots + \xi_6 = n$. Из-за симметрии кубика математические ожидания $\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_1)$, $\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_3)$, $\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_4)$, $\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_5)$, $\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_6)$ одинаковы. Кроме того,

   $$\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_2) = \mathsf{E}(\xi_2^2) = \mathsf{D}(\xi_2) + \mathsf{E}^2(\xi_2) = 5n/36 + n^2/36.$$

   Посчитаем $\mathsf{E}(\xi_2\,(\xi_1 + \ldots + \xi_6)$. С одной стороны, это равно

   $$\mathsf{E}(\xi_2\,(\xi_1 + \ldots + \xi_6)) = \mathsf{E}(\xi_2)n = n^2/6,$$

   с другой стороны,

   $$\mathsf{E}(\xi_2\,(\xi_1 + \ldots + \xi_6)) = \mathsf{E}(\xi_2^2) + 5\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_4) = 5n/36 + n^2/36 + 5\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_4).$$

   Таким образом,

   $$n^2/6 - 5n/36 - n^2/36 = 5\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_4).$$

   $$\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_4) = \frac{n^2 - n}{36}.$$

   Следовательно, искомый коэффициент корреляции равен

   $$r(\xi_2,\,\xi_4) = \frac{cov(\xi_2, \xi_4)}{\sqrt{\mathsf{D}(\xi_2)\mathsf{D}(\xi_2)}} = \frac{\mathsf{E}(\xi_2\,\xi_4) - \mathsf{E}(\xi_2)\mathsf{E}(\xi_4)}{5n/36} = \frac{(n^2 - n)/36 - n^2/36}{5n/36} = -\frac{1}{5}.$$

   Полученный коэффициент корреляции не зависит от n.

5. Взято случайное нечетное двоичное число, не превосходящее 2^{10}. Найдите вероятность того, что в его двоичной записи ровно 5 единиц.

   Ответ: $\frac{63}{256}$.

   Максимальный балл: 2

5 Математические основы искусственного интеллекта

1. Решается задача классификации. Тестовым примерам соответствуют следующие метки классов:

   $$y_{\text{true}} = (2, 2, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 2)^T.$$

   Алгоритм машинного обучения предсказал следующие значения меток:

   $$y_{\text{pred}} = (0, 0, 0, 2, 1, 1, 2, 1, 2, 2)^T.$$

   Вычислите значение взаимной информации между y_{true} и y_{pred}. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

   Ответ: 0.42

   Максимальный балл: 2

2. Решается задача линейной регрессии. Имеется следующая матрица признаков:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T.$$

Ей соответствует следующая целевая функция:

$$y = (-2.6, 2.2, 7.9, -0.6, 4.2)^T.$$

Обучите модель линейной регрессии методом наименьших квадратов. В ответ запишите сумму квадратов всех коэффициентов полученной линейной функции (сдвиг тоже!). Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 11.10

Максимальный балл: 2

3. Введем следующие обозначения. Обозначим через $\mathrm{CNN}(in, out, ker)$ – сверточный слой с in каналов на вход, out каналов на выход, ker – размерность ядра свертки; считаем, что параметры $stride = 1$, $padding = 1$. Обозначим через $\mathrm{FC}(in, out)$ – полносвязный линейный слой с in входами и out выходами. После данных слоев, естественно, стоит некоторая нелинейность, но она не повлияет на решение задачи. Также через $\mathrm{MP}(size)$ обозначим операцию субдескретизации (макспулинг) с размером окна $size$, $padding = 0$, $stride = size$. Дополнительно, обозначим через AVP – стандартную глобальную усредненную субдескретизацию (average global pooling, когда из тензора размерности $(,, h, w)$ вычисляем среднее по окну (h, w) и получаем тензор $(,, 1, 1)$). Окончательно, обозначим через FL – стандартную операцию спрямления тензора до первых двух размерностей. Таким образом, пара AVP $\to$ FL спрямляет карты признаков в одномерный вектор.

Рассмотрим модель со следующей диаграммой:

$$\mathrm{CNN}(3,16,3) \to \mathrm{CNN}(16,16,1) \to \mathrm{MP}(2) \to \mathrm{CNN}(16,32,3) \to \mathrm{CNN}(32,32,3) \to \mathrm{MP}(2) \to \mathrm{CNN}(32,32,1) \to$$

$$\to \mathrm{AVP} \to \mathrm{FL} \to \mathrm{FC}(32,24) \to \mathrm{FC}(24,10).$$

Вычислите количество весов данной модели.

Ответ: 16706

Максимальный балл: 3

4. Нарисуйте направленный граф, согласно следующей диаграмме, стрелка обозначает наличие направленной связи:

$$A \to B \to C, A \to D \to E, F \to D, G \to C.$$

Рассмотрим совместное распределение переменных $A, \ldots, G$, согласованное с графом, т.е. имеется некоторая **полная** байесовская сеть (все соотношения условной независимости однозначно определены свойством d-разделимости графа). Какие из следующих утверждений про условную независимость верны?

(a) A, E условно независимы при условии D

(b) A, G условно независимы при условии C

(c) A, D условно независимы при условии B

(d) A, F условно независимы при условии D

Ответ: (a)

Максимальный балл: 4

5. Решается задача регрессии. Модель – нейронная сеть прямого распространения. Рассматривается следующий пример:

$$X = (0.0, -1.0, -1.0),$$

и целевая функция:

$$y = (1.0).$$

Рассматривается нейронная сеть со следующей архитектурой:

$$\mathrm{FC}(3,2) \to \mathrm{ReLU} \to \mathrm{FC}(2,1),$$

где $\mathrm{FC}(in, out)$ обозначает линейный полносвязный слой с in входами и out выходами; ReLU – функция активации типа «полулинейный элемент» (rectified linear unit). Параметры сети инициализируются следующим образом:

$$W_1 = \begin{pmatrix} -1.0 & -2.0 & -1.0 \\ -2.0 & -1.0 & -1.0 \end{pmatrix},$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.0 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -2.0 & -2.0 \end{pmatrix}^T,$$

$$b_2 = (1.0).$$

Здесь W_i – матрица весов i-ого слоя, а b_i – вектор сдвига соответствующего слоя. Вычислите предсказание модели $\widehat{y}$. Рассмотрим функцию ошибки $\mathrm{L} = (\widehat{y} - y)^2$. Методом обратного распространения ошибки вычислите $\frac{\partial L}{\partial W_1}$. В ответ запишите сумму квадратов ячеек полученной матрицы. Ответ округлите до двух знаков после запятой.

Ответ: 8.0

Максимальный балл: 4

6 Дискретная математика

1. Дан граф $G(V, E)$, где V—множество вершин графа G, а E — множество его ребер. Известно, что в некотором остовном дереве T_G графа G 10 ребер. Какие из перечисленных ниже утверждений могут быть верны для графа G?

   (a) $|E| = 10$
   (b) $|E| = 45$
   (c) $|E| = 55$
   (d) $|E| = 60$
   (e) $|V| = 10$
   (f) $|V| = 11$
   (g) $|E| < \frac{|V|}{2}$
   (h) $|E| = |V|$

   Ответ: (a), (b), (c), (f), (h)

   Максимальный балл: 2

2. Даны монеты достоинством 3 и 11 енотов. Каким минимальным количеством этих монет можно набрать ровно 49 енотов?

   Ответ: 11.

   Максимальный балл: 2

3. Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, $\text{НОД}(a, b) = 5$. Вычислите все возможные значения $\text{НОД}(6a, b)$.

   (a) $\frac{5}{6}$
   (b) 1
   (c) 5
   (d) 10
   (e) 11
   (f) 15

(g) 30

(h) 60

Ответ: (c), (d), (f), (g)

Максимальный балл: 4

4. Найдите все полиномы $P(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$, такие что $(x-1) \cdot P(x) \equiv 1 \pmod{\mathrm{x}^2 + 3\mathrm{x} + 2}$.

Ответ: $P(x) = x + 4 + h(x) \cdot (x^2 + 3x + 2),\ h(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ или любой эквивалентный

Максимальный балл: 9

Решение:

По определению сравнения $(x-1) \cdot P(x) \equiv 1 \pmod{\mathrm{x}^2+3\mathrm{x}+2} \Leftrightarrow \mathrm{(x-1) \cdot P(x) + y(x) \cdot (x^2+3x+2) = 1,\ y(x) \in \mathbb{Z}_7[x]}$. Полученное уравнение — диофантово уравнение на $(P(x), y(x))$ над евклидовым кольцом многочленов $\mathbb{Z}_7[x]$. Любым способом (например, при помощи обобщенного алгоритма Евклида) найдем какое-нибудь частное решение: $\begin{cases} P(x) = x + 4 \\ y(x) = -1 \end{cases}$. Решение соответствующей однородной задачи: $\begin{cases} P_0(x) = h(x) \cdot (x^2 + 3x + 2) \\ y_0(x) = -h(x) \cdot (x-1) \end{cases}$, где $h(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$. Таким образом, искомое множество многочленов имеет вид: $P(x) = x + 4 + h(x) \cdot (x^2 + 3x + 2),\ h(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$.

5. Дан многочлен $p(x) = (1 + x^2 + x^3)^{20}$. Вычислите коэффициент при x^{12}.

Ответ: 198645.

Максимальный балл: 2